LOEWNER 理論 [1]

目次

[1] 2014 年 11 月 22-24 日に開催された "International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory" の資料として作成．2014 年 11 月 25 日修正．

1　Preliminaries

1.1　用語

本稿では等角や単葉といった用語を用いるが，文献や背景によって若干異なる場合があるので，はじめに意味を明確にしておく．

f が単射であるとき，f を**単葉**（univalent）であるという．単に単葉といった場合に正則性を含むか含まないかは背景によって異なるが，ここでは単葉といった場合は単射正則関数であるとする．

次に，領域 D 上で正則な関数 f がある点 $a \in G$ で $f'(a) \neq 0$ であった場合，f は点 a で**等角**（conformal）となる．つまり a を通る 2 つの滑らかな曲線の接線が a においてなす角と，それらの像曲線の接線が $f(a)$ においてなす角は，向きも込めて等しくなる．f が a で等角であるとき，ある a

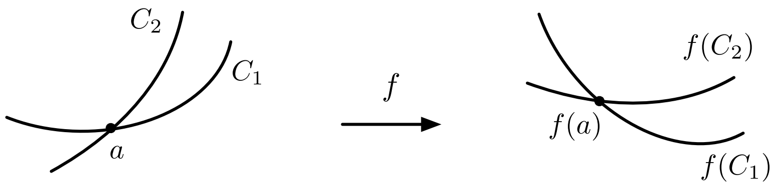

図 1. f は点 a で等角である

の近傍 U_a が存在し，f は U_a 上で単葉となる，つまり**局所単葉**となる．もちろん G 内の全ての点において局所単葉であったとしても，領域 G 上全体で単葉になるかはわからない．

一方で f が領域 G 上で**等角**であるとは，f が G 上で単射正則であるときに言う．f が G 上等角であれば全ての $a \in D$ に対して $f'(a) \neq 0$ であり，また a で等角である．こうすると等角写像と単葉関数は同じではないかと思うかもしれないが，実際そうである．ただ単葉関数論と等角写像論は扱う対象や研究目的が異なり，ある程度の住み分けができている．

1.2　等角写像

等角写像の最も重要な性質のひとつとして次の Riemann の写像定理がある．ここで G が単連結領域であるとは，$\mathbb{C}$ に関する補集合 $\mathbb{C} \setminus G$ が連結な領域である時にいう．

Theorem 1.1 (Riemann の写像定理)**.** *G を境界が 2 点以上からなる複素平面 $\mathbb{C}$ 上の単連結領域とする．このとき単位円板 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ を G に写すような等角写像 $f : \mathbb{D} \to G$ が存在する．また G 上の一点 $a \in D$ が与えられたとき，正規化条件*

$$f(0) = a,\ \ f'(0) > 0$$

により f は一意に定まる．

$\mathbb{D}$ を $\mathbb{C}$ に写すような等角写像は存在しないことが Liouville の定理より直ちに分かる．またリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト性より $\mathbb{D}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への，また $\mathbb{C}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への等角写像も存在しない．実際，$\widehat{\mathbb{C}}$ 上の任意の単連結領域は等角写像により $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ のいずれかに分類される（Koebe の一意化定理）．

単純閉曲線に囲まれた領域を Jordan 領域という．これについては次の定理が基本的である．

Theorem 1.2 (Carathéodory の定理)**.** 単位円板 $\mathbb{D}$ を *Jordan* 領域 G へと写す等角写像は $\overline{\mathbb{D}}$ 上の同相写像 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{G}$ に一意に拡張できる．

1.3　領域の収束

後に必要となる領域列と等角写像との関係性についてここで述べておく．$\{U_n\}$ を $\mathbb{C}$ 上の領域列で，全ての n に対し U_n はある点 a を含むとする．V_n を $U_n \cap U_{n+1} \cap \cdots$ の内点の連結成分で a を含むものとする．このとき，もし $U := \bigcup_n^\infty V_n$ が空集合でなければ，これを a に関する U_n の **Carathéodory 核**と呼ぶ．もし空集合の場合は一点集合 $\{a\}$ を U_n の Carathéodory 核とする．領域列 $\{U_n\}$ が U に**核収束する**とは，$\{U_n\}$ の任意の部分列が同じ Carathéodory 核 U を持つ時にいい，$U_n \overset{\text{Cara}}{\to} U$ で記す．

核収束は，直感的にイメージする「領域列がある集合に連続的に近づいていく（例えば $U_t := \{|z| < 1 - \frac{1}{t}\}$ のような）」という以上のことを含んでいる．例えば領域列を $U_n := \mathbb{C} \setminus (-\infty, n]$ のように定義すると，この領域列の核は上半平面もしくは下半平面となる．極限のところで領域がジャンプしているように見えるが，こういったものも核収束である．

領域列 $\{U_n\}$ とそれに伴う等角写像 $f_n : \mathbb{D} \to U_n$ の列との以下の関係性が重要である．

Theorem 1.3 (Carathéodory の核定理)**.** $\{f_n\}$ を $\mathbb{D}$ 上の等角写像列で $f_n(0) = a, f_n'(0) > 0$ を満たすものとする．このとき，$\{f_n\}$ が $\mathbb{D}$ 上広義一様収束するための必要十分条件は，その像領域列 $U_n := f_n(\mathbb{D})$ が a に関する核 U に収束し，U が境界が 2 点以上からなる $\mathbb{C}$ 上の単連結領域となることである．またこのとき極限関数 $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ は $\mathbb{D}$ を U に移すような等角写像である．

核 U は一点集合や $\mathbb{C}$ になる場合もある．上記定理ではそのような場合は除外されている．

1.4　単葉函数と Bieberbach 予想

$\mathbb{D}$ 上定義された単葉函数で $f(0) = 0, f'(0) = 1$ と正規化されたものの族を $\mathcal{S}$ で記す．この $\mathcal{S}$ に関する理論を単葉函数論という．$\mathcal{S}$ は広義一様収束の位相のもとコンパクトである．

$f(0) = 0$ により f の定数項が 0 となり，また $f'(0) = 1$ より f の展開式の第一係数が 1 となる．つまり任意の $f \in \mathcal{S}$ は展開式

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

を持つ．この展開式における係数 a_n の評価に関する予想問題が **Bieberbach 予想**である．1916 年，Bieberbach により次の定理が示された．

Theorem 1.4 (Bieberbach [Bie16])**.** 任意の $f(z) := z + \sum_{n=2}^\infty a_n z^n \in \mathcal{S}$ に対し，$|a_2| \le 2$ である．等式が成り立つのは，f が *Koebe* 函数

$$K(z) := \frac{z}{(1-z)^2}$$

の回転 $e^{i\theta}K(e^{-i\theta}z)$ に限る（$0 \le \theta < 2\pi$）．

この予想に関して，一般に $n \geq 2$ の場合にも $|a_n| \leq n$ が成り立つと予想したのが Bieberbach 予想である．1923 年に Löwner により $|a_3| \leq 3$ が示された．この時に用いられた手法が Loewner 理論の発端である．その後も $n = 4, 5, 6$ の場合が証明されたが，最終的に 1985 年に de Branges [dB85] により全ての n に対して肯定的に解決された．de Branges の証明にも Loewner の方法が本質的に用いられている．Bieberbach 予想の歴史に関しては [Koe07] に詳しい．また日本語による当時の記事が [Oza85] にある．

のちに用いる $\mathcal{S}$ の性質として Koebe の 1/4-定理を述べておく．

Theorem 1.5 (The Koebe 1/4-Theorem)**.** 全ての $f \in \mathcal{S}$ に対し，$f(\mathbb{D})$ は $\{|z| < 1/4\}$ の円板を含む．

Koebe 関数 K は $\mathbb{D}$ を $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1/4]$ へと写すので，これが最良の評価であることがわかる．一方で $\mathbb{D}$ を像領域に含むような $f \in \mathcal{S}$ は恒等写像に限る．これは Schwarz の補題による帰結である．

1.5 Karl Löwner

文献によって（またこのノート内でも）Löwner と Loewner と 2 つの表記が用いられるが，これは彼がアメリカに移住した時に名前を英語風に変えた事による．

Karl Löwner（チェコ語では Karel Löwner）は 1893 年 5 月 29 日にボヘミア王国（チェコ共和国の中央・西エリア）の Lány という村で生まれた．母国語はチェコ語であるが，父親の教育方針からか初等教育はドイツ語で受けている．プラハにあるドイツ・ギムナジウム（高校のようなもの）を卒業後，1912 年にプラハ・カレル大学に入学，1917 年に Ph.D. を取得した．指導教官は Georg Pick.

その後 4 年半をプラハの German Technical University で過ごした後，ドイツの University of Berlin（現在のフンボルト大学）にポジションを得た．そこでは Schmidt，Schur，Alfred & Richard Brauer, Hopf，von Neumann，Szegö ら優秀な数学者に囲まれ，刺激的な日々を過ごしたようである．その後ケルンで 2 年間講師を務めた後，1930 年には再びプラハに戻りプラハ・カレル大学の員外教授に就任した．1938 年，ナチス・ドイツによるチェコスロバキア解体に伴いプラハが占領され，その際にユダヤ人であった Löwner も投獄される．しかし幸運にも彼とその家族は釈放・国外退去を許され（それなりの「税金」の支払いを強いられたようだが），1939 年にアメリカに移住．その際に名前を Charles Loewner と改める．

移住後は von Neumann の斡旋を受け Louisville University にポジションを得た．その後 1944 年に Brown University, 1946 年に Syracuse University と移動したのち，最終的に 1951 年に California の Stanford University に移った．1968 年 1 月 8 日，Stanford にて死去．

Loewner の来歴に関しては The MacTutor History of Mathematics archive の Charles Loewner の記事や [Loe88], [BCDMV14] などに詳しい．

2 Classical Radial Loewner Equations (Slit case)

Löwner は parametric representation という画期的な手法で $\mathcal{S}$ の極値問題にアプローチし，以後の単葉函数論の研究に大きな影響を与えた．まずは彼のオリジナルの手法について述べる．

$\mathbb{C}$ 上のジョルダン曲線 γ（つまり自身と交わらない曲線）で，片方の端点が ∞ であるようなものを考える．このとき $\mathbb{C}\setminus\gamma$ を **slit domain** と呼ぶ．$\mathcal{S}_{\mathrm{slit}}$ をクラス $\mathcal{S}$ に含まれるような関数でその像領域が slit domain となるようなものの族とし，$f \in \mathcal{S}_{\mathrm{slit}}$ を **slit map** と呼ぶ．このとき slit map に関する以下の定理が知られている．

Theorem 2.1. 任意の与えられた $f \in \mathcal{S}$ に対し，関数列 $\{f_n\} \subset \mathcal{S}_{\mathrm{slit}}$ で f に $\mathbb{D}$ 上広義一様収束するようなものが存在する．

この性質は $\mathcal{S}$ の極値問題において非常に重要である．つまり $\mathcal{S}_{\mathrm{slit}}$ は広義一様収束の位相で $\mathcal{S}$ 上稠密であるので，$\mathcal{S}_{\mathrm{slit}}$ 上の $|a_n|$ の評価を吟味すればよいという事になる．

Theorem 2.1 の証明のアイデアを簡単に述べておく．まず任意の $f \in \mathcal{S}$ は $\mathcal{S}$ 内の関数で境界が滑らかなもので広義一様に近似できる．これは例えば $r \in (0,1)$ に対して $f(rz)/r$ を考えれば良い．よって $f(\mathbb{D})$ は境界が滑らかな有界ジョルダン領域であると仮定してよい．

次のような slit を考えよう．閉曲線 $\partial f(\mathbb{D})$ 上の一点 w_0 を取り，ここから図 2 のように正の向きに $w_1, w_2, \cdots$ と $\partial f(\mathbb{D})$ 上の点を取る．また $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$ とする．Γ_n を，w_0 と ∞ とを結ぶ Jordan 弧と，$\partial f(\mathbb{D})$ の部分弧で w_0 と w_n とを結ぶようなものの和集合とする．つまり Γ_n は無限遠点から伸び，

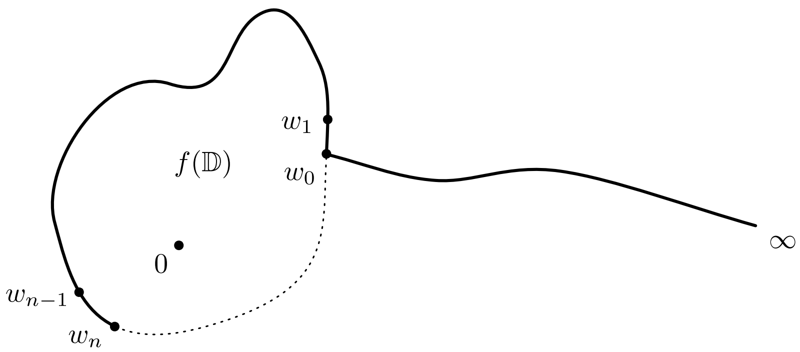

図 2. Γ_n は無限遠点から伸び，$f(\mathbb{D})$ の境界に到達した後は $\partial f(\mathbb{D})$ をなぞっていく

$\partial f(\mathbb{D})$ にぶつかった後 $\partial f(\mathbb{D})$ をぐるっと正の向きになぞっていくような曲線である．この Γ_n を用いて slit domain を $U_n := \mathbb{C}\setminus\Gamma_n$ と定義する．ここで最も重要な事実は，U_n は $f(\mathbb{D})$ に核収束するということである．U_n に伴う slit map 列の $f_n : \mathbb{D} \to U_n$ で $f_n(0) = 0, f_n'(0) > 0$ を考えると，Theorem 1.3 より f_n は f に広義一様収束することがわかる．

次に $\mathcal{S}_{\mathrm{slit}}$ が満たす性質を観察しよう．$f \in \mathcal{S}_{\mathrm{slit}}$ とし，slit を $\Gamma := \mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$ とする．Γ にパラメータを $\gamma : [0,\infty) \to \Gamma$ のように入れる．Γ の片方の端点は無限遠点であったので $\gamma(+\infty) = \infty$ とする．すると領域列 $U_t := \mathbb{C}\setminus\gamma([t,\infty])$ が定義でき，Riemann の写像定理により U_t を像領域に持つ等角写像

$$f_t : \mathbb{D} \to U_t,\ \ f_t'(0) = 0,\ \ f_t'(0) > 0$$

が定義される（$f_0 = f$ となっていることに注意）．ここで $f_t'(0)$，つまり f_t の級数展開の第一係数は t に関して狭義単調増加である[2]．簡単のためパラメータを取り直し，$f_t'(0) = e^t$ となるようにする．このような等角写像族 $\{f_t\}$ に対し，Löwner は次の定理を導いた．

[2]もしそうでなければ，ある s と $t\,(s < t)$ が存在し $f_s'(0) = f_t'(0)$ である．関数 $\phi := f_t^{-1} \circ f_s : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を考えれば $\phi'(0) = 1$ となり，Schwarz の補題より $\phi(z) = z$，つまり $f_t \equiv f_s$．これは $\{U_t\}$ の構成の仕方に矛盾する．

Theorem 2.2 (Löwner [Löw23]). 上記のように定義された *slit map* の族 $(f_t)_{t\geq 0}$ に対し，次が成立する．

(i) f_t は t に関して C^1 級である（Γ の滑らかさに関係なく！）．
(ii) ある実数値連続関数 $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ が一意に存在し，f_t は次の偏微分方程式を満たす;

$$\dot{f}_t(z) = z f_t'(z) \frac{1 + z e^{-i\lambda(t)}}{1 - z e^{-i\lambda(t)}}, \tag{2.1}$$

ここで $\dot{f}_t := \partial f_t / \partial t, f_t' := \partial f_t / \partial z$ である．

Remark 2.3. (2.1) 式右辺の第三項 $p(z,t) = (1 + ze^{-i\lambda(t)})/(1 - ze^{-i\lambda(t)})$ は $\mathbb{D}$ を右半平面 $\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ へと写す写像である．つまり全ての $z \in \mathbb{D}$ と $t \in [0,\infty)$ に対して $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$ となる．

逆の主張，大まかに言うと上記の微分方程式の一意解が等角写像族を生成するという事実に関しては次の章で詳しく述べる．ここでは**駆動関数**と呼ばれる関数 λ と (f_t) との関係性について言及しておく．たとえ λ が連続であっても，(2.1) によって生成される等角写像族 (f_t) は slit mps とは限らない事が Kufarev（[Kuf47]）によって指摘されている．一方でもし λ が有界な導関数を持つなら slit $\mathbb{C} \setminus f_0(\mathbb{D})$ は C^1 である（[Ale76]）．また [Won14] によれば，駆動関数が C^β であれば slit は $C^{\beta+1/2}$ となる，ここで $\beta > 1/2$（証明や，β が整数でない場合の C^β の定義などは [Won14] を参照）．逆に slit の形状が λ に与える影響として，C^n slit が C^{n-1} 駆動関数を与えることが知られている（[EE01]）．

微分方程式 (2.1) を用いて $f_0 \in \mathcal{S}$ の係数を評価してみよう．ここでは次のクラスの性質を用いる．単位円板 $\mathbb{D}$ 上定義された正則関数 p で $\operatorname{Re} p(z) > 0$ を満たし $p(0) = 1$ であるようなものの族を $\mathcal{P}$ で記す．例えば (2.1) 式右辺の $(1 + ze^{-i\lambda(t)})/(1 - ze^{-i\lambda(t)})$ は全ての $t \in [0,\infty)$ に対して $\mathcal{P}$ に含まれている．Bieberbach 予想と違い，$\mathcal{P}$ に関する係数評価は比較的容易に知ることができる．

Theorem 2.4. 任意の $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \in \mathcal{P}$ に対して，

$$|c_n| \leq 2 \tag{2.2}$$

が成り立つ．

Remark 2.5. (2.2) の等号成立条件については例えば [Pom75, p.41] を参照のこと．例えば $\mathbb{D}$ を右半平面 $\mathbb{H}$ へと写す Möbius 変換 $p(z) = (1+z)/(1-z)$ などは等号を満たす．

$f_t(z) = e^t z + a_2(t) z^2 + \cdots$ を Theorem 2.2 で扱った slit maps としよう．これは (2.1) を満たすので，f_t を代入して

$$e^t z + \dot{a}_2(t) z^2 + \cdots = z(e^t + 2a_2 z + \cdots) \cdot (1 + 2e^{-i\lambda(t)} z + \cdots)$$

を得る．両辺の z^2 の係数を比較すると $\dot{a}_2(t) = e^t 2e^{-i\lambda(t)} + 2a_2(t)$ が得られることがわかる．これを解いて

$$a_2(t) = -2e^{2t} \int_t^\infty e^{-u} e^{-i\lambda(u)} du$$

を得る．よって $|a_2| = |a_2(0)| = 2$ が示された．

3 Classical Radial Loewner Equations (Simply-connected domain case)

3.1 Radial Loewner chains

上記では slit domain のケースを扱ったが，今度はより一般の単連結領域のケースを考察する．これは 1965 年に Pommerenke によってなされた定式化である（[Pom65, Pom75]）．

$f_t(z) = e^t z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n$ を $t \in [0, \infty)$ で parametrize された $\mathbb{D}$ 上の正則関数族とする．$(f_t)_{t \geq 0}$ が **Loewner chain**[3] であるとは，次の性質を満たす時にいう;

1. 各々の $t \in [0, \infty)$ に対し f_t は $\mathbb{D}$ 上単葉である（つまり $f_t/e^t \in \mathcal{S}$），

2. 任意の $s, t \in [0, \infty), s < t$ に対し．包含関係 $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$ が成り立つ．

このとき，slit の場合と同様に f_t の第一係数が e^t である事から像領域の包含関係は真である，つまり $f_s(\mathbb{D}) \subsetneq f_t(\mathbb{D})$．また Theorem 1.5 より $f_t(\mathbb{D})$ は半径 $e^t/4$ の円板を含むので，$t \to \infty$ で $f_t(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ となることがわかる．なお，ここでは (f_t) の t による連続性は特に仮定されていない事に留意されたい．

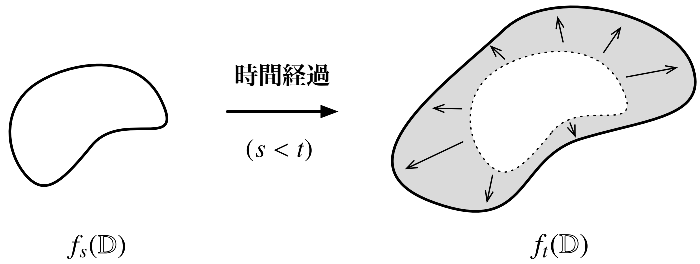

図 3. 像領域 $f_t(\mathbb{D})$ は時間が経つにつれて連続的に拡がっていく．

Loewner chain を領域列から定義すると次のようになる．$\{U_t\}_{t \geq 0}$ を $\mathbb{C}$ 上の単連結領域族で次の性質を満たすようなものとする;

1'. $0 \in U_0$,

2'. 任意の $0 \leq s < t < \infty$ に対し $U_s \subsetneq U_t$,

3'. ある点列 $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ に対して $t_n \to t < \infty$ のとき $U_{t_n} \overset{\text{Cara}}{\to} U_t$ であり，また $t = \infty$ の場合は $t_n \to \infty$ のとき $U_{t_n} \overset{\text{Cara}}{\to} \mathbb{C}$ である $(n \to \infty)$.

このような $\{U_t\}$ に対し，等角写像族 $f_t : \mathbb{D} \to U_t$ で任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $f_t(0) = 0, f_t'(0) > 0$ であるようなものが存在する．適当な拡大により $f_0 \in \mathcal{S}$ と，また $f_t'(0)$ は狭義単調増加である事から（そうでなければ $U_s \subsetneq U_t$ に矛盾する）パラメータを取り直して $f_t'(0) = e^t$ としてよい．結果としてこのような (f_t) は Loewner chain となる．

Loewner chain (f_t) に対し，クラス $\mathcal{S}$ の性質を応用することにより次の性質を導くことができる．

Lemma 3.1 (e.g. [Pom65, p.157])**.** 任意の固定された $z \in \mathbb{D}$ に対し，*Loewner chain* (f_t) は全ての $s < t$ に対して

$$|f_s(z) - f_t(z)| \leq \frac{8|z|}{(1 - |z|)^4} |e^s - e^t|$$

を満たす．

[3] 最初に Loewner chain という言葉を用いたのは Pommerenke [Pom65] であると思われる．

特に (f_t) は任意の固定された $z \in \mathbb{D}$ に対して $t \in [0, \infty)$ 上絶対連続である．

(f_t) が Loewner chain であるための必要十分条件として以下が知られている．

Theorem 3.2 ([Pom65, Pom75]). $0 < r_0 \le 1$ とし，$f_t(z) = e^t z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n$ を $t \in [0, \infty)$ で *parametrize* された $\mathbb{D}$ 上の正則関数とする．そのとき (f_t) が *Loewner chain* であるための必要十分条件は次の条件が満たされることである;

1. f_t は各々の $z \in \mathbb{D}_{r_0} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\}$ に関して $t \in [0, \infty)$ について絶対連続であり，ある定数 K_0 が存在して
$$|f_t(z)| \le K_0 e^t \quad (z \in \mathbb{D}_{r_0},\ t \in [0, \infty))$$
が成り立つ．
2. 関数 $p(z, t)$ が存在し，ほとんど全ての $t_0 \in [0, \infty)$ に関して $p(z, t_0)$ は $\mathbb{D}$ 上正則であり $\mathrm{Re}\, p(\mathbb{D}, t_0) > 0$，また各々の $z_0 \in \mathbb{D}$ に関して $p(z_0, t)$ は $t \in [0, \infty)$ 上可測であり，
$$\dot{f}_t(z) = z f_t'(z) p(z, t) \qquad (z \in \mathbb{D}_{r_0},\ \text{a.e. } t \in [0, \infty)) \tag{3.1}$$
を満足する．

上記の定理にある微分方程式 (3.1) を**レブナー微分方程式**と呼ぶ．また微分方程式内に現れる関数 p を **Herglotz 関数**と呼ぶことにする．(3.1) を観察してみよう．p の実部は常に正であり，つまり $-\pi/2 < \arg p(z, t) < \pi/2$ である．これにより

$$|\arg \dot{f}_t(z) - \arg z f_t'(z)| = |\arg p(z, t)| < \frac{\pi}{2}$$

が成立する．$z f_t'(z)$ は曲線 $f_t(\partial \mathbb{D}_{|z|})$ の 点 z における法線ベクトル，$\dot{f}_t$ は t が増加した時に点 $f_t(z)$ が動く方向つまり速度ベクトルを表している（図 4）．つまり微分方程式 (3.1) はまさに領域 $f_t(\mathbb{D})$ が時間経過によって拡がるという動きを記述している．

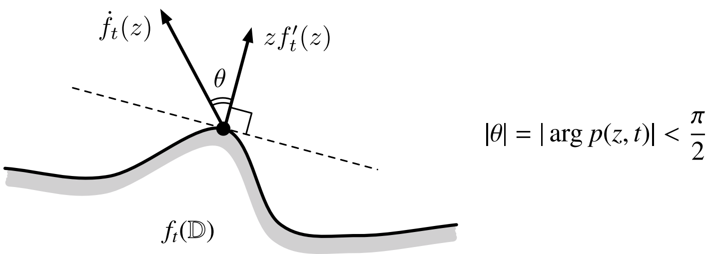

図 4. 法線ベクトル $z f_t'$ と速度ベクトル $\dot{f}_t$ のなす角 θ は $|\theta| < \pi/2$ を満たす

Remark 3.3. Theorem 3.2 の十分条件についていくつか述べておく．

- f_t はある（小さな）円板 $\mathbb{D}_{r_0}$ 上において条件 *1, 2* を満たしていれば十分である．つまり Theorem 3.2 は単に微分方程式を満たすというだけでなく，f_t が $\mathbb{D}$ まで解析接続できてしかもそこで単葉になるという事実を主張している．
- 条件 *1* から，全ての $t \ge 0$ に対して f_t が単葉となるような，t に関して一様な $\mathbb{D}_{r_0}$ 内の領域の存在が約束される．詳しく述べると，Theorem 3.2 の前提条件より $f_t'(0) = e^t \ne 0$，つまり f_t は任意の t に対して局所単葉である．一方，条件 *1* の主張より関数族 $\{f_t/e^t\}_{t \ge 0}$ は正規族となる．

f_t/e^t は $z+\alpha(t)z^2+\cdots$ という展開式を持つので，極限関数 $F := \lim_{t\to\infty} f_t/e^t$ は局所単葉な正則関数である．つまり

$$r^* := \inf_{t\geq 0}\{r \in [0, r_0) : \ f_t \text{ は } \mathbb{D}_r \text{ 上で単葉 }\} > 0$$

である．

最後に，$\mathcal{S}$ の任意の元はある Loewner chain (f_t) の initial link f_0 として埋め込めることを記しておく．

Theorem 3.4 ([Pom75, p.159])**.** 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対してある *Loewner chain* (f_t) で $f_0 \equiv f$ となるものが存在する．

証明のアイデアだけ簡単に述べておく．$f(\mathbb{D})$ をジョルダン領域と仮定しよう．$H := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{f(\mathbb{D})}$ とおくと，単葉函数 $g : \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}} \to H$ で $g(\infty)=\infty$ となるものが存在する．g によって生成されるジョルダン曲線 $C_t := g(\{|z| = e^t\})$ に囲まれる領域で 0 を含むほうを U_t とおけば，$\{U_t\}$ は上記にあった領域列の条件 *1',2',3'* を満たし $U_0 = f(\mathbb{D})$ となる．あとは $\{U_t\}$ から Loewner chain を生成すれば良い．$f(\mathbb{D})$ がジョルダン領域でない場合は $r_n \in (0,1)$ を用いて radial limit $f(r_n z)/r_n$ を考えれば良い．

一方である与えられた $f \in \mathcal{S}$ に対し，$f_0 = f$ となるような Loewner chain (f_t) はひとつとは限らない．これは簡単な具体例，例えば $n \in \mathbb{N}$ としたときの関数

$$f_t^n(z) := e^t z - \frac{e^{t/n}z^2}{2}$$

を見ればわかる．$f \in \mathcal{S}$ に対する (f_t) の一意化は課題の一つである．

3.2 Evolution families

レブナー微分方程式を導く過程で，*evolution family* と呼ばれる単位円板上の関数族 $(\varphi_{s,t})$ が中心的な役割を演じる．正確に言うと，**evolution family** は以下の条件を満たす 2 変数自己正則写像 $\varphi_{s,t} : \mathbb{D} \overset{\text{into}}{\to} \mathbb{D}$ の族である；

1. 任意の $s \geq 0$ に対して $\varphi_{s,s}(z) = z$,
2. 任意の $0 \leq s \leq u \leq t < \infty$ に対して $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$.
3. $\varphi_{s,t}(0) = 0, \varphi'_{s,t}(0) = e^{s-t}$,

(f_t) を Loewner chain として $f_t^{-1} \circ f_s$ という関数をイメージすれば捉えやすい．一方で上記の定義では $\varphi_{s,t}$ に関する単葉性，パラメータに関する連続性は一切仮定されていないことに注意する．単葉性は後の常微分方程式との関連で，s,t に関する絶対連続性は Lemma 3.1 に類似した次の性質から導かれる．

Lemma 3.5. $z \in \mathbb{D}$ を固定すれば，全ての $0 \leq s \leq u \leq t < \infty$ に対し

$$|\varphi_{s,t}(z) - \varphi_{u,t}(z)| \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)^2}(1-e^{s-u}) \qquad \text{及び} \qquad |\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq 2|z|\frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{u-t}),$$

が成り立つ．

さて，上記で述べたように Loewner chain (f_t) に対して $\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s$ とおくと，この $\varphi_{s,t}$ は evolution family を定義する．つまり $f_t(\varphi_{s,t}) = f_s$ であるので，これの両辺を t で微分すると $\dot{f}_t(\varphi_{s,t}) + f_t'(\varphi_{s,t}) \cdot \dot{\varphi}_{s,t} = 0$ となる．これを (3.1) に代入すると

$$\dot{\varphi}_{s,t}(z) = -\varphi_{s,t}(z) p(\varphi_{s,t}(z), t). \tag{3.2}$$

を得る．これを**レブナー常微分方程式**と呼ぶ．この常微分方程式に関する解の存在性と一意性については以下が基本的である．

Theorem 3.6 ([Pom65, Pom75])**.** $p(z,t)$ を $z \in \mathbb{D}$ 上正則，$t \in [0,\infty)$ 上可測で，全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \in [0,\infty)$ に対して $\mathrm{Re}\, p(z,t) > 0$ を満たすようなものとする．このとき，任意の固定された $z \in \mathbb{D}$ と $s \geq 0$ に対し，初期条件 $w_s = z$ で与えられる初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w,t), \quad \text{a.e. } t \in [s,\infty)$$

は一意の絶対連続解 $w(t) = w(t; z, s)$ を持つ．ここで $\varphi_{s,t} := w(t; z, s)$ と定義すると，$(\varphi_{s,t})$ は *evolution family* となり，また解の一意性から $\mathbb{D}$ 上単葉である．さらに極限

$$f_s(z) := \lim_{t\to\infty} e^t \varphi_{s,t}(z) \tag{3.3}$$

を考えると，これは $\mathbb{D}$ 上広義一様に存在し，(f_s) は *Loewner chain* となる．

逆に，(f_t) を *Loewner chain* とし $(\varphi_{s,t})$ を (f_t) により $\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s$ で生成される *evolution family* とする．そのときほとんど全ての $t \in [s,\infty)$ に対して (3.2) を満たし，(3.3) の関係が成り立つ．

Theorem 3.6 の最初の主張で，もし異なる 2 つの Herglotz function p_1, p_2 が同じ evolution family を生成するなら，ほとんど全ての $t \geq 0$ に対して $p_1(z,t) = p_2(z,t)$ である．よってこの定理は Loewner chain (f_t), evolution family $(\varphi_{s,t})$, Herglotz 関数 p の間に本質的な 1 対 1 対応があることを示している．

4 Classical Chordal Loewner Equations

Radial case ではいわゆる内点を共通の固定点に持つ関数族を扱った．一方で Kufarev らは境界点を共通の固定点に持つ関数族を，Loewner の場合とは若干異なる枠組みで論じた（[KSS68]）．これは Radial case と比較して **Chordal case** と呼ばれる．

4.1 Chordal Loewner chains

議論を始める前に，Riemann の写像定理のいわゆる "Chordal version" を紹介しておく．ここで領域 $D \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$ 上の部分集合 Γ が **slit** であるとは，ある $T > 0$ と同相写像 $\gamma : [0,T] \to \overline{D}$ が存在し，$\gamma([0,T)) = \Gamma$ であり $\gamma(T) \in \partial D$ であるような時にいう．

Theorem 4.1 (see e.g. [dMG])**.** Γ を上半平面 $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 上の *slit* とし，Γ は点 ζ_0 において実軸 $\mathbb{R}$ と交わるとする．また $\overline{\Gamma} := \Gamma \cup \{\zeta_0\}$ とする．このとき等角写像 $f_\Gamma : \mathbb{H}^+ \overset{onto}{\to} \mathbb{H}^+ \setminus \Gamma$ が存在し，*hydrodynamic condition*

$$\lim_{z\to\infty} (f_\Gamma(z) - z) = 0 \tag{4.1}$$

を満たす．さらに以下が成り立つ;

1. $f_\Gamma\big|_{\mathbb{H}^+}$ は $\widehat{\mathbb{C}}\setminus f_\Gamma^{-1}(\overline{\Gamma})$ から $\widehat{\mathbb{C}}\setminus(\overline{\Gamma}\cup\overline{\Gamma}_{\mathrm{refl}})$ への等角写像 g_Γ^* に拡張される，ここで $\overline{\Gamma}_{\mathrm{refl}}$ は $\overline{\Gamma}$ の $\mathbb{R}$ に関する鏡像である，
2. 拡張された等角写像 f_Γ^* は ∞ でローラン展開

$$f_\Gamma^*(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}$$

を持つ，ここで全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して $c_n\in\mathbb{R}$ であり，特に $c_1<0$ である．

さて，上半平面上の slit Γ を考えよう．Theorem 4.1 より，(4.1) を満たすような等角写像 $f_t:\mathbb{H}^+\xrightarrow{\text{onto}}\mathbb{H}^+\setminus\gamma([t,T])$ の族を定義することができる．このとき $c_1(t)$ は t に関して狭義単調増加であるので，$2t$ となるようにパラメータを取り直す．このような f_t は微分方程式

$$\dot{f}_t(z) = -f_t'(z)\frac{2}{\lambda(t)-z} \tag{4.2}$$

を満たす，ここで $\lambda:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は実数値連続関数であり，$f_t(\lambda(t))$ は slit $\gamma([t,T])$ の実軸上にない方の端点 $\gamma(t)$ となる．t が増加するに従って slit は埋まっていき，$\lambda(t)$ はスリットの縮小に伴って $\mathbb{R}$ 上を右往左往する．このような (f_t) を **Chordal Loewner chain** と呼ぶ．

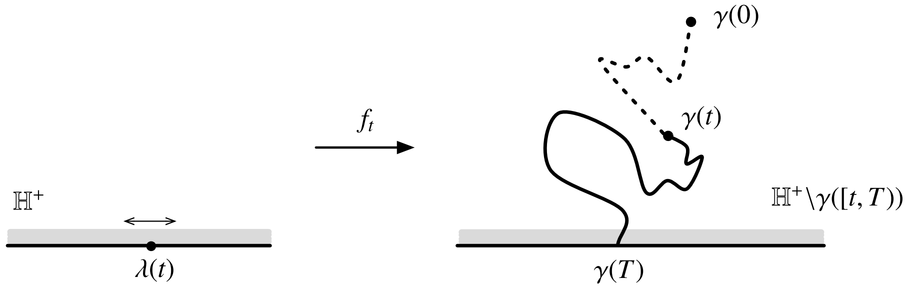

図 5. f_t は上半平面 $\mathbb{H}$ を slit domain $\mathbb{H}\setminus\gamma([t,T])$ へと写す．

(4.3) の形の微分方程式について言及した最初の文献は Kufarev による 1946 年の論文 [Kuf46] のようである．その後 1954 年に Popova [Pop54] によって最初に研究され，最終的に 1968 年に Kufarev らによって上記の定式化がなされた[4] [5]．

4.2 Schramm-Loewner Evolutions

レブナー微分方程式の確率論への応用について触れておく．まず $g_t := f_t^{-1}$ とおくと $f_t\circ g_t$ は恒等写像であるので，両辺を t で微分して $\dot{f}_t + f_t'\cdot g_t' = 0$．よって (4.3) は

$$\dot{g}_t(w) = \frac{2}{g_t(w)-\lambda(t)} \qquad (w\in\mathbb{H}^+\setminus\gamma([t,T])) \tag{4.3}$$

のように表すことができる．与えられた連続関数 $\lambda(t)$ に対して (4.3) により等角写像族 (g_t) が定まるが（slit map とは限らない），$\mathcal{B}_t$ を 1 次元 Brown 運動，$\kappa>0$ を実定数とし $\lambda(t):=\sqrt{\kappa}\mathcal{B}_t$ としたとき

[4] 筆者はロシア語を解さないため，このあたりは全て第三者からの受け売りである．ただ方程式 (4.3) が現れる事は文献から確認出来る．Chordal Loewner equation の歴史については [BCDMV14, pp.8-9] なども参照する事．

[5] これらロシア語の文献の入手は易しくないが，有難くも Gumenyuk 氏が有志でレブナー理論に関係するロシア語文献のスキャンを自身のホームページにアップロードしている．

に得られる (g_t) を **Schramm-Loewner 発展**または **SLE** と呼ぶ（[Sch00]）．この場合 slit は 2 次元ランダムウォークの様相を呈する．κ はランダム項の強さを表し，κ を特定の値に固定する事で様々な 2 次元格子上の統計物理モデルに現れる曲線を記述することができる事が知られている;

$\kappa = 2$	Loop Erased Random Walk
$\kappa = 8/3 = 2.66\cdots$	Self-Avoiding Walk
$\kappa = 16/3 = 5.33\cdots$	臨界イジング模型 (critical Ising model)
$\kappa = 6$	臨界パーコレーション模型
$\kappa = 8$	Uniform Spanning Tree

SLE が統計物理学・共形場理論に与えた影響は大きく，現在多くの数学者によって活発に研究されている．2006 年及び 2010 年には同理論に関して 2 人の数学者がフィールズ賞を受賞しており，現代数学における最新のトピックの一つといってもよい．SLE に関しては香取氏による日本語のサーベイ [Kat07] や Lawler によるテキスト [Law05] に詳しい．また他にも多くのサーベイ論文が執筆されている．

5 Semigroups of holomorphic maps

3.2 節で $\mathbb{D}$ 上の自己正則写像 $(\varphi_{s,t})$ を扱ったが，Loewner 理論は正則関数の Semigroup の理論とも深い関係がある．ここではその定義と基本的な性質，また Loewner 理論との関係性について述べる．

5.1 Preparations

D を $\mathbb{C}$ 上の単連結領域としよう．$\mathrm{Hol}(D, \mathbb{C})$ を D 上定義された正則関数全体の集合とし，特に D 上の正則自己写像 $f : D \overset{\text{into}}{\to} D$ 全体を $\mathrm{Hol}(D)$ で記す．

Schwarz-Pick の補題は $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ の最も基本的な性質の一つである．

Lemma 5.1 (Schwarz-Pick の補題)**.** $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ とすると，任意の $z, w \in \mathbb{D}$ に対して

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(z)}f(w)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right|$$

が成り立つ．ここで等号が成り立つようなある点 $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ が存在すれば $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ である．

Schwarz-Pick より，任意の $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \backslash \{\mathrm{id}\}$ は $\mathbb{D}$ 上に多くとも 1 つの固定点を持つ [6]．そのような点が存在するとき，それを **Denjoy-Wolff point** と呼ぶ．一方でもしそのような点が $\mathbb{D}$ 内に存在しないとき，Denjoy-Wolff の定理（see e.g. [ES10, p.12]）により境界固定点 $\tau = \angle \lim_{z \to \tau} f(z) \in \partial\mathbb{D}$ が一意に存在し f の反復合成の列 $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が τ に広義一様に収束する．ここで $\angle \lim$ は angular limit（または non-tangential limit）を，また f^n は f の n 回合成写像（$f^1 := f, f^n := f \circ f^{n-1}$）を表す．このような境界点も同様に **Denjoy-Wolff point** と呼ぶことにしよう．注意として，境界固定点が必ずしも Denjoy-Wolff point になるわけではない．単純な例としては Möbius 変換 $M(z) = (z + a)/(1 + \bar{a}z) : \mathbb{D} \overset{\text{onto}}{\to} \mathbb{D}$ がある（$a \in \mathbb{D}$）．M は $\pm a/|a|$ を境界固定点として持つが，一方 $a/|a|$ のみが Denjoy-Wolff point である．

Denjoy-Wolff point に関連して次の定理も紹介しておく．

[6] もし 2 点持てば $f(z) = z, f(w) = w$ となり Schwarz-Pick の等号が成立するので f は恒等写像になる．

Theorem 5.2 (Julia-Wolff-Carathéodory の定理 (see e.g. [ES10, p.11])). $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ とする．このとき次の主張は同値である*;*

(i). f は $\mathbb{D}$ 内に固定点を持たない（つまりある境界固定点 τ_0 が存在する）.

(ii). 極限

$$\alpha_1 := \angle \lim_{z\to\tau_1} \frac{f(z)-\tau_1}{z-\tau_1}$$

が存在するような境界点 $\tau_1 \in \partial\mathbb{D}$ が存在する．またこのとき $\alpha_1 \in (0,1]$ である.

(iii). 上極限

$$\alpha_2 := \liminf_{z\to\tau_2} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|}$$

が存在するような境界点 $\tau_1 \in \partial\mathbb{D}$ が存在する．またこのとき $\alpha_2 \leq 1$ である.

(iv). 上限

$$\alpha_3 := \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\varphi_{\tau_3}(f(z))}{\varphi_{\tau_3}(z)} \tag{5.1}$$

となるような境界点 $\tau_3 \in \partial\mathbb{D}$ が存在する．またこのとき $\alpha_3 \leq 1$ である．ここで

$$\varphi_\tau(z) := \frac{|1-z\overline{\tau}|}{1-|z|^2} = \frac{|z-\tau|^2}{1-|z|^2}$$

である.

また次の事実が成り立つ*;*

- 上記 *(i)-(iv)* の τ_0-τ_3 及び α_1-α_3 は同じ値である.
- *(ii)* の *angular limit* は *radial limit* に置き換えることができる.

Remark 5.3. $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ に対して Theorem 5.2 を適用した時，もし境界固定点が ∞ だった場合 (5.1) は

$$\mathrm{Re}\, z \leq \mathrm{Re}\, f(z) \qquad (z \in \mathbb{H})$$

となる．よって Herglotz function との親和性を考慮に入れると Chordal Loewner chain を考えるときには上半平面より右半平面の方が何かと都合がいい場合がある.

5.2 One-parameter semigroups

$\mathbb{D}$ 上の正則自己写像族 $\{\phi_t\}_{t\geq 0} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ が **(continuous) one-parameter semigroup**[7] であるとは，以下の性質が満たされる時にいう;

1. $\phi_0 = id_{\mathbb{D}}$,
2. 任意の $s, t \geq 0$ に対し $\phi_{s+t} = \phi_t \circ \phi_s$,
3. $\mathbb{D}$ 上広義一様に $\lim_{t\to 0^+} \phi_t(z) = z$.

Evolution family の場合と同様，ここではまだ $\phi_t(z)$ が z に関して単射かどうか，またパラメータ t に関して連続かについては言及していない.

One-parameter semigroup $\{\phi_t\}$ に対して，以下の定理が基本的である.

[7] t が $n \in \mathbb{N}$ のような discrete の場合は **discrete one-parameter semigroup** と呼ぶ.

Theorem 5.4 (see e.g. [ES10, p.18]). $\{\phi_t\}_{t\geq 0}$ を $\mathbb{D}$ 上の正則自己写像による *one-parameter semigroup* とする．このとき任意の $z\in\mathbb{D}$ に対して極限

$$G(z) := \lim_{t\to 0^+}\frac{\phi_t(z)-z}{t} \tag{5.2}$$

が $\mathbb{D}$ 広義一様に存在し，$G\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{C})$ である．さらにこの *semigroup* は G により定義される初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi_t(z)}{\partial t} = G(\phi_t(z)),\ \ t\geq 0 \\ \phi_0(z) = z,\ \ z\in\mathbb{D} \end{cases} \tag{5.3}$$

の一意解として得られる．

Remark 5.5. Theorem 5.4 を吟味してみる．

- (5.2) の G は $\mathbb{D}$ 内の各点 z における $t=0$ のときの速度ベクトルである．この G による常微分方程式 (5.3) の一意解として $\{\phi_t\}$ が得られるのだから，$\{\phi_t\}$ は t が 0 から増加した瞬間の「初動」によってその後の動きが完全に決定されることを示している．例えば，ある時間 $T>0$ まで $\phi_t(z) := e^{it}z$ のように回転していたものが T を過ぎたら突然 $\phi_t(z) = e^{-t+T}z$ のように 0 に収縮しだす，という事は起こり得ない（semigroup の範囲では）.
- $\{\phi_t\}_{t\geq 0}$ は t に関して微分可能（つまり連続）であり，また (5.3) の解の一意性により任意の $t\geq 0$ に対して ϕ_t は $\mathbb{D}$ 上単葉であることがわかる．

(5.3) で得られる関数 $G\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{C})$ を **infinitesimal generator** と呼び，そのような G 全体を $\mathrm{Gen}(\mathbb{D})$ で表す．勿論，全ての $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{C})$ が $\mathrm{Gen}(\mathbb{D})$ に含まれるわけではない．$\mathrm{Gen}(\mathbb{D})$ に属するための色々な必要十分条件が知られているが，ここでは代表的なものとして次の Berkson-Porta の定理を挙げる．

Theorem 5.6 (Berkson and Porta [BP78]). $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{C})$ とする．このとき $f\in\mathrm{Gen}(\mathbb{D})$ であるための必要十分条件は，ある $p\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\overline{\mathbb{H}})$ と点 $\tau\in\overline{\mathbb{D}}$ が存在し

$$G(z) = (z-\tau)(\bar{\tau}z-1)p(z) \qquad (z\in\mathbb{D}) \tag{5.4}$$

が満たされることである．

(5.4) は **Berkson-Porta representation** と呼ばれる．上記の τ は infinitesimal generator G によって (5.3) で生成される semigroup $\{\phi_t\}$ により定義される Denjoy-Wolff point である．

6 Intermission

ここで radial case, chordal case, semigroup のそれぞれの場合に現れる常微分方程式を比べてみよう．(f_t) が radial Loewner chain の場合，対応する evolution family が満たす微分方程式は

$$\dot{w}_t = G(w_t,t) \qquad \text{with} \qquad G(z,t) := -zp(z,t). \tag{6.1}$$

である．Chordal case は整合性を取るために上半平面でなく単位円板で考える．f_t にケーリー変換 $C(z) = i(1+z)/(1-z) : \mathbb{D}\to\mathbb{H}^+$ を合成すれば，chordal Loewner chain に対応する evolution family が満たす微分方程式は

$$\dot{w}_t = G(w_t,t) \qquad \text{with} \qquad G(z,t) := (1-z)^2p(z,t). \tag{6.2}$$

となる，ここで $p(z,t) = i/(\lambda(t) - C(z)) \in \mathbb{H}$．最後に one-parameter semigroup が満たす微分方程式は Theorem 5.6 より

$$\dot{w}_t = G(w_t) \quad \text{with} \quad G(z) := (z-\tau)(\bar{\tau}z - 1)p(z) \tag{6.3}$$

である．

G はそれぞれの場合における dynamics のベクトル場を与える関数である（左辺は全て速度ベクトルになっている）．上記を眺めると，3 つの G の類似性が見て取れる．つまり Berkson-Porta representation (6.3) の $\tau = 0$ の場合に (6.1) の radial case と，$\tau = 1$ の場合に (6.2) の chordal case と類似した式を導出する．一方 (6.3) の infinitesimal generator は t に関して恒等的である．ではこれらを統一的に扱うことはできないだろうか? その問いに答えるのが次章からの内容である．

7 Modern Loewner Theory

2010 年から 2012 年にかけ，Bracci, Contreras, Díaz-Madrigal, Gumenyuk らにより evolution family と Loewner chain の概念をより一般的な枠組みで扱う新たなアプローチがもたらされた（[BCDM12, BCDM09, CDMG10]）．これにより前章の 3 つの概念は完全に統一され，多岐にわたる様々な等角写像の力学系を記述することが可能となった．核となるのは一般化された evolution family と，前章で見たベクトル場を与える関数 G の一般化である Herglotz vector fields との間の本質的な 1 対 1 対応である．

7.1 Generalized evolution families

まずは evolution family 及び one-parameter semigroup の概念を一般化する．ここで $L^d(X,Y)$ は可測関数 $f : X \to Y$ で $(\int_X f^d du)^{1/d} < \infty$ となるようなものの族である．

Definition 7.1 ([BCDM12, Definition 3.1])**.** $\mathbb{D}$ 上の正則関数族 $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t<\infty}$ が **evolution family of order** d with $d \in [1,\infty]$ または L^d**-evolution family** であるとは次の条件を満たす時に言い $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ で記す;

EF1. $\varphi_{s,s}(z) = z$,

EF2. 任意の $0 \le s \le u \le t < \infty$ に対して $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$,

EF3. 任意の $z_0 \in \mathbb{D}$ と $T_0 > 0$ に対してある非負実数函数 $k_{z_0,T_0} \in L^d([0,T_0],\mathbb{R})$ が存在し，

$$|\varphi_{s,u}(z_0) - \varphi_{s,t}(z_0)| \le \int_u^t k_{z_0,T_0}(\zeta)d\zeta \tag{7.1}$$

が $0 \le s \le u \le t \le T_0$ に対して成立.

従来の条件 EF1 と EF2 はそのまま採用する．ただこれだけではパラメータに関する条件が何もないので，最低限の条件として EF3 を仮定する．order の d は EF3 に現れる関数 k_{z_0,T_0} が含まれる L^d 空間の指数である．従来の evolution family や one-parameter semigroup に比べ，$(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ は共通する固定点の存在は一切仮定されていないことに注意する．

$\mathtt{EF}^d$ の基本的な性質として以下が従う;

Theorem 7.2 ([BCDM12, Proposition 3.7, Corollary 6.3])**.** $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ とする．

(i). 全ての $0 \le s \le t < \infty$ に対し，$\varphi_{s,t}$ は $\mathbb{D}$ 上単葉である．

(ii). 任意の固定した $z_0 \in \mathbb{D}$ と $s_0 \in [0,\infty)$ に対し，$\varphi_{s_0,t}(z_0)$ は $t \in [s_0,\infty)$ 上局所絶対連続である．

(iii). 任意の固定した $z_0 \in \mathbb{D}$ と $t_0 \in (0,\infty)$ に対し，$\varphi_{s,t_0}(z_0)$ は $s \in [0,t_0]$ 上絶対連続である．

次に，infinitesimal generator の概念を $\mathtt{EF}^d$ と同じ枠組みのもとで一般化する．

Definition 7.3 ([BCDM12, Definition 4.1, Definition 4.3])**.** $\mathbb{D}$ 上の **weak holomorphic vector field of order** $d \in [1,\infty]$ とは，以下の性質を満たす函数 $G : \mathbb{D} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ である;

WV1. 全ての $z_0 \in \mathbb{D}$ に対して，$G(z_0,t)$ は $t \in [0,\infty)$ 上可測,

WV2. 全ての $t_0 \in [0,\infty)$ に対して，$G(z,t_0)$ は $\mathbb{D}$ 上正則,

WV3. 全てのコンパクト集合 $K \subset \mathbb{D}$ と全ての $T > 0$ に対して，非負実数函数 $k_{K,T} \in L^d([0,T],\mathbb{R})$ が存在し

$$|G(z,t)| \le k_{K,T}(t)$$

が全ての $z \in K$ 及びほとんど全ての $t \in [0,T]$ に対して満たされる．

さらに G が **Herglotz vector field of order** d であるとは，ほとんど全ての $t \in [0,\infty)$ に対して $G(\cdot,t)$ が infinitesimal generator である時に言，このとき $G \in \mathtt{HV}^d$ と記す．

Herglotz vector field は前章の (6.1), (6.2), (6.3) に現れる関数 G を一般化したものである．つまり $G \in \mathtt{HV}^d$ において，t に関する a.e. での断面が infinitesimal generator になっている．

Weak holomorphic vector field に対して（つまり $G \in \mathtt{HV}^d$ に対しても）以下の局所 Lipschitz 性が成り立つ．証明を眺めることで $\hat{k}_{K,T}$ がある程度明確に記述できることがわかる．

Lemma 7.4 ([BCDM12, Lemma 4.2])**.** *G を weak holomorphic vector field of order d とする．そのとき，任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{D}$ と任意の $T > 0$ に対して非負函数 $\hat{k}_{K,T} \in L^d([0,T],\mathbb{R})$ が存在し*

$$|G(z_1,t) - G(z_2,t)| \le \hat{k}_{K,T}(t)|z_1 - z_2|$$

が全ての $z_1, z_2 \in K$ 及びほとんど全ての $t \in [0,T]$ に対して満たされる．

***Proof*.** コンパクト集合 $K \in \mathbb{D}$ と $T > 0$ を固定する．r を $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r$ を満たすような最小のものとしよう．また $r^* := (1+r)/2$ とする．このときコーシーの定理より任意の $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}_r$ に対し

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le 4|z_1 - z_2| \sup_{\zeta \in \overline{\mathbb{D}}_{r^*}} f(\zeta)$$

が成り立つことに注意する．よって $k_{\overline{\mathbb{D}}_{r^*},T} \in L^d([0,T],\mathbb{R})$ を WV3 で得られる L^d 関数とすると，

$$|G(z_1,t), G(z_2,t)| \ \le\ 4|z_1 - z_2| \sup_{\zeta \in \overline{\mathbb{D}}_{r^*}} G(\zeta,t) \ \le\ 4k_{\overline{\mathbb{D}}_{r^*},T}|z_1, z_2|$$

が得られる． □

最も重要な性質は，以下の $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ と $G \in \mathtt{HV}^d$ の本質的な 1 対 1 対応である．ここで函数 f が**本質的に一意**とは，もし題意を満たすような他の函数 $g(x)$ が存在すれば，a.e. で $f(x) = g(x)$ となるときにいう．

Theorem 7.5 ([BCDM12, Theorem 5.2, Theorem 6.2]). $d \in [1, \infty]$ とする．そのとき，任意の $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$ に対して $G \in \mathtt{HV}^d$ が本質的に一意に存在し

$$\dot{\varphi}_{s,t}(z) = G(\varphi_{s,t}(z), t) \tag{7.2}$$

が全ての $z \in \mathbb{D}$ 及びほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対して満たされる，ここで $\dot{\varphi}_{s,t} := \partial\varphi_{s,t}/\partial t$ である．

逆に，任意の $G \in \mathtt{HV}^d$ に対して初期値 $\varphi_{s,s}(z) = z$ により定まる上記微分方程式の一意解は *evolution family of order d* となる．

次に，$G \in \mathtt{HV}^d$ の具体的な表現について考察する．そのためにまず Loewner 微分方程式で用いた Herglotz function の概念を下記のように一般化する．

Definition 7.6 ([BCDM12, Definition 4.5]). $\mathbb{D}$ 上の **A Herglotz function of order** $d \in [1, \infty]$ とは，以下の性質を満たす函数 $p : \mathbb{D} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ であり，$p \in \mathtt{HF}^d$ で記す;

HF1. 全ての $z_0 \in \mathbb{D}$ に対し，$t \in [0, \infty)$ 上の函数 $p(z_0, \cdot)$ は $L^d_{\mathrm{loc}}([0, \infty), \mathbb{C})$ に含まれる，

HF2. 全ての $t_0 \in [0, \infty)$ に対し，函数 $p(\cdot, t_0)$ は $\mathbb{D}$ 上正則である，

HF3. 全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対し $\operatorname{Re} p(z, t) \geq 0$ である．

特に異なる点は，HF1 での L^d 空間の導入と HF3 の条件 $\operatorname{Re} p(z, t) \geq 0$ において等号を許した点である．従来の Herglotz function と違い $p(0) = 1$ のような正規化条件を何も持たないので，$p(z, t) = i$ という場合も有り得る．条件 HF1 は次の条件と同値なことが知られている．

Proposition 7.7 ([BCDM12, Proposition 4.6]). $d \in [1, \infty]$ とする．このとき $p \in \mathtt{HF}^d$ であるための必要十分条件は，p が HF2, HF3 と次の 2 条件を満たすことである;

HF1'. 全ての $z_0 \in \mathbb{D}$ に対し，$t \in [0, \infty)$ 上の函数 $p(z_0, t)$ は可測である．

HF2'. ある z_0 が存在して，$t \in [0, \infty)$ 上の函数 $p(z_0, t)$ は $L^d_{\mathrm{loc}}([0, \infty), \mathbb{C})$ に含まれる．

$p \in \mathtt{HF}^d$ を用いて，Berkson-Porta representation の次のような一般化が得られる．

Theorem 7.8 ([BCDM12, Theorem 4.8]). $G \in \mathtt{HV}^d$ とする．そのとき，本質的に一意な可測関数 $\tau : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ と $p \in \mathtt{HF}^d$ が存在し，

$$G(z, t) = (z - \tau(t))(\overline{\tau(t)}z - 1)p(z, t) \tag{7.3}$$

を全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $z \in [0, \infty)$ に対して満たす．

逆に，与えられた可測関数 $\tau : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ と $p \in \mathtt{HF}^d$ に対し，上記の等式は *Herglotz vector field of order d* を生成する．

便利のため，このノートでは上記 Theorem 7.8 内で現れた可測関数 $\tau : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ を **Denjoy-Wolff 函数**と呼ぶことにする[8]．また $\tau \in \mathtt{DW}$ で記す．

$p \in \mathtt{HV}^d$ と $\tau \in \mathtt{DW}$ のペア (p, τ) を $G \in \mathtt{HV}^d$ に対する **Berkson-Porta データ**と呼ぶ．Berkson-Porta データ全体を $\mathtt{BP}^d$ で記す．つまり，$(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$，$G \in \mathtt{HV}^d$，$(p, \tau) \in \mathtt{BP}^d$ の間に本質的な 1 対 1 対応がある（図 6）．特に (7.2) と (7.3) により，$\varphi_{s,t}$ と (p, τ) の関係は次の常微分方程式によって特徴付けられることがわかる;

$$\dot{\varphi}_{s,t}(z) = (\tau(t) - \varphi_{s,t}(z))(1 - \overline{\tau(t)}\varphi_{s,t}(z))p(\varphi_{s,t}(z), t). \tag{7.4}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
G \in \mathtt{HV}^d \arrow[rr, leftrightarrow] & & (p,\tau) \in \mathtt{BP}^d
\end{tikzcd}
$$

図 6. $(\varphi_{s,t}) \in \mathtt{EF}^d$，$G \in \mathtt{HV}^d$，$(p,\tau) \in \mathtt{BP}^d$ は本質的に 1 対 1 対応である．

これは常微分方程式 (6.1)（$\tau = 0$ の時），(6.2)（$\tau = 1$ の時），(6.3)（$G \in \mathtt{HV}^d$ が t に依存しない時）を特別な場合として含む方程式である．

(7.3) 式を観察する．G が $z \in \mathbb{D}$ の各点における $(\varphi_{s,t})$ の速度ベクトルを与えている事は前に言及した．(7.3) の右辺を見ると，特に $z = \tau(t)$ での速度ベクトルは 0 であることがわかる．つまり $\tau \in \mathtt{DW}$ は $\mathbb{D}$ 内に定義されている flow（つまり G）の「目」のような役割をしていることがわかる．従来のケースでは τ は t に依存しない固定点であった．一方 $\tau \in \mathtt{DW}$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 内を可測的に動き回る．これにより $(\varphi_{s,t})$ により定義されるベクトル場 G の基点は複雑に変化し，非常に多様な動きを表現することが可能となる．

7.2 Generalized Loewner chains

次に Loewner chain の概念を $\mathtt{EF}^d$ と同じ枠組みで一般化する．

Definition 7.9 ([CDMG10, Definition 1.2]). 単位円板 $\mathbb{D}$ 上定義された正則函数の族 $(f_t)_{t\geq 0}$ が **Loewner chain of order** $d \in [1, \infty]$，または単に L^d**-Loewner chain** であるとは，次の条件を満たすときにいい，$(f_t) \in \mathtt{LC}$ で記す;

LC1. 各 $t \in [0, \infty)$ に対し，$f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ は単葉,

LC2. 全ての $0 \leq s < t < \infty$ に対し $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$,

LC3. 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{D}$ と $T > 0$ に対してある非負函数 $k_{K,T} \in L^d([0, T], \mathbb{R})$ が存在し，全ての $z \in K$ と $0 \leq s \leq t \leq T$ に対し

$$|f_s(z) - f_t(z)| \leq \int_s^t k_{K,T}(\zeta) d\zeta \tag{7.5}$$

を満たす．

また Loewner chain of order d が **normalized** であるとは，$f_0 \in \mathcal{S}$ であるときにいう．

L^d-evolution family の場合と同様，各々の f_t に共通する固定点の存在は一切仮定されていない．定義では LC1, LC2 により「像領域が拡張する等角写像族」を定める．しかしこれだけだと力学系は何もないので，ある程度の t に関する連続性を LC3 で定めておく．Proposition 7.7 より（特に HF2' より）classical radial & chordal Loewner chains はどちらも L^∞-Loewner chains である．

上記で「像領域が拡張する」と述べたが，正確には拡張ではなく非減少である．Classical radial case では $f_t'(0) = e^t$ の正規化から $f_s(\mathbb{D}) = f_t(\mathbb{D})$ となる場合はなかった．上記の定義では何の正規化も課されていないので，ある $s < t$ に対して $f_s(\mathbb{D}) = f_t(\mathbb{D})$ のように等号が成立する場合もある．また Theorem 1.5 により $f_t(\mathbb{D})$ は半径 $f_t'(0)/4$ の円板を含むが，L^d-Loewner chain の場合は $f_t'(0)$ が発散するという

[8] τ には特に一般的に用いられている名称はないので，ここでは便宜上このような名前をつけておく．

条件もないので，$f_t(\mathbb{D})$ が $\mathbb{C}$ まで拡張せずに途中で止まる場合やある領域に収束する場合もある．つまり $\Omega[(f_t)]$ を

$$\Omega[(f_t)] := \bigcup_{t\geq 0} f_t(\mathbb{D})$$

とすれば，$\Omega[(f_t)] = \mathbb{C}$ とは限らないという事である．この $\Omega[(f_t)]$ を **Loewner range** と呼ぶ．

$(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ と $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ の関係性について以下が成り立つ．

Theorem 7.10 ([CDMG10, Theorem 1.3])**.** 任意の $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ に対し，もし

$$\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s \quad (0 \leq s \leq t < \infty)$$

とすれば，$(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ である．逆に，任意の $(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ に対し等式

$$f_t \circ \varphi_{s,t} = f_s \quad (0 \leq s \leq t < \infty) \tag{7.6}$$

を満たすような $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ が存在する．

上記の定理より，$(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ は一般化されたレブナー微分方程式

$$\dot{f}_t(z) = f_t'(z)(z - \tau(t))(1 - \overline{\tau(t)}z)p(z,t) \tag{7.7}$$

を満たす．ここで $(p, \tau) \in \mathrm{BP}^d$ である．(7.7) に関しても (7.3) と同じ考察が言える．つまり時間経過で $f_t(\mathbb{D})$ が広がっていくが，(7.7) より $z = \tau$ のとき速度ベクトル $\dot{f}_t(z)$ は 0 になるので，$f_t(\mathbb{D})$ は $z = \tau$ を基点として広がっていく．池の水が点 $f_t(\tau(t))$ から湧き出て広がるようなイメージを持ってもらえばいいと思う．τ が固定点であれば描写は比較的単純である．一方 L^d-Loewner chain の場合は τ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上の可測関数である．例えば radial type と chordal type が交互に現れるような chain も記述することができる．なお，Proposition 7.7 により classical radial & chordal Loewner chains は LC^∞ である．

Theorem 7.10 より任意の $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ に対して $(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ がひとつ定まる．一方で与えられた $(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ に対し (7.6) を満たすような $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ は無数に存在する．ただ，ある性質を満たすものに限れば LC^d と EF^d の間に 1 対 1 対応を作ることができる．それに関する性質が次の定理である．ここで

$$\beta(z) := \lim_{t\to+\infty} \frac{|\varphi_{0,t}'(z)|}{1 - |\varphi_{0,t}(z)|^2}$$

とする．

Theorem 7.11 ([CDMG10, Theorem 1.6, Theorem 1.7])**.** *$(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ とし，$\mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ を $(\varphi_{s,t})$ により生成される normalized L^d-Loewner chains の族とする．このとき，$\Omega[(f_t)]$ が $\mathbb{C}$ または $\mathbb{C}$ 上の原点中心の円となるような $(f_t) \in \mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ の元が一意に存在する．さらに;*

- *以下の 4 条件は同値である;*
    1. $\Omega[(f_t)] = \mathbb{C}$,
    2. $\mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ はひとつの元のみから成る,
    3. 全ての $z \in \mathbb{D}$ に対し $\beta(z) = 0$,
    4. ある点 $z_0 \in \mathbb{D}$ が少なくともひとつ存在し，$\beta(z_0) = 0$.

- 一方，もし $\Omega[(f_t)] \neq \mathbb{C}$ であれば，$\mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ 内の一意元 (f_t) の *Loewner range* は

$$\Omega[(f_t)] = \left\{ w : |w| < \frac{1}{\beta(0)} \right\}$$

で表され，他の全ての $(g_t) \in \mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ は次の形で表される;

$$g_t(z) = \frac{h(\beta(0) f_t(z))}{\beta(0)} \quad (h \in \mathcal{S}).$$

EF^d と LC^d の性質についてもう少し紹介する．$(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ から $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ を復元するために，EF^d に関する次の性質が必要である．ここで $AC^d(X,Y)$ は局所絶対連続関数 $f : X \to Y$ で $f' \in L^d_{\mathrm{loc}}(X)$ となるようなものの族である．

Lemma 7.12 ([CDMG10, Proposition 2.9])**.** $(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ とする．このとき関数 $\alpha \in AC^d([0,\infty), \mathbb{D})$ と $\beta \in AC^d([0,\infty), \partial\mathbb{D})$ が，また $(\psi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ が一意に存在し，次が満たされる;

(i). $\alpha(0) = 0, \beta(0) = 1$.

(ii). 全ての $0 \le s \le t < +\infty$ に対して $\psi_{s,t}(0) = 0, \psi'_{s,t}(0) > 0$ である．

(iii). 全ての $0 \le s \le t < +\infty$ に対して $\varphi_{s,t}$ は

$$\varphi_{s,t} = M_t \circ \psi_{s,t} \circ M_s^{-1} \tag{7.8}$$

のように表される，ここで M は

$$M_t(z) := \frac{\beta(t) z + \alpha(t)}{1 + \beta(t)\overline{\alpha(t)} z} \tag{7.9}$$

で与えられる．

Remark 7.13. Lemma 7.12 において，関数 α と β はそれぞれ

$$\alpha(t) = \varphi_{0,t}(0) \quad \text{and} \quad \beta(t) = \frac{\varphi'_{0,t}(0)}{|\varphi'_{0,t}(0)|},$$

で与えられる（[CDMG10, p.987]）.

Lemma 7.12 を用いて $(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ から $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ を構築してみよう．なお，このようにしてできる (f_t) は normalized L^d-Loewner chain である．

$(\varphi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ とする．そのとき Lemma 7.12 のような $(\psi_{s,t}) \in \mathrm{EF}^d$ が一意に存在する．このとき極限

$$h_s(z) := \lim_{t \to \infty} \frac{\psi_{s,t}(z)}{\psi'_{0,t}(0)} \tag{7.10}$$

が $\mathbb{D}$ 上の任意のコンパクト集合上一様に存在し，これは L^d-Loewner chain になることが知られている．また計算により $h_s(0) = 0, h'_0(0) = 1$ であるので，$(h_t) \in \mathcal{L}[(\psi_{s,t})]$ である．$f_t := h_t \circ M_t^{-1}$ とおけば，$(f_t) \in \mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ となる．

次に (f_t) の Loewner range について考察しよう．これは Theorem 7.11 の部分的な証明を与えるものである．上記に述べたように，classical な場合と異なり，L^d-Loewner chain に関しては $f_t(\mathbb{D})$ が $\mathbb{C}$ まで広がるかある領域に収束するかはわからない．$(\varphi_{s,t})$ はその $\Omega[(f_t)]$ の挙動に関する重要な情報を与えてくれる．

$\psi_{0,t} = \psi_{s,t} \circ \psi_{0,s}$ より $\psi'_{0,t}(z) = \psi'_{s,t}(\psi_{0,s}(z)) \cdot \psi'_{0,s}(z)$ であるので，(7.10) は（特に右辺は）次のように書ける；

$$h_s(z) = \frac{1}{\psi'_{0,s}(0)} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_{s,t}(z)}{\psi'_{s,t}(0)}. \tag{7.11}$$

計算により $\psi'_{0,s}(0) = \dfrac{|\varphi'_{0,s}(0)|}{1 - |\varphi_{0,s}(0)|^2}$ であり，特に $s \mapsto \psi'_{0,s}(0)$ は単調であるので

$$\beta := \lim_{s\to\infty} \frac{|\varphi'_{0,s}(0)|}{1 - |\varphi_{0,s}(0)|^2}$$

が定義できる．(7.11)の lim の関数は $\mathcal{S}$ の元なので，Theorem 1.5 より $h_t(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}_{1/(4\psi'_{0,t}(0))}$ である．よって $\beta = 0$ であれば $\Omega[(f_t)] = \Omega[(h_t)] = \mathbb{C}$ である．

一方 $\beta > 0$ とする．このとき (7.10) により $\phi_s := \lim_{t\to\infty} \psi_{s,t}$ が $\mathbb{D}$ 上広義一様に存在する事が言える．ここで

$$\phi'_s(0) = \frac{\beta}{\psi'_{0,s}(0)} \to 1 \quad (s \to \infty)$$

であることに注意する．一方 $\phi_s(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $\phi_s(0) = 0$ である．よって Schwarz の補題より $s \to \infty$ のとき $\phi_s \to \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ である．このとき $s \to \infty$ で $h_s(z) = z/\beta$ となる．結論として $\Omega[(f_t)] = \{|z| < 1/\beta\}$ を得る．

Loewner range と Berkson-Porta data の関係性として次の十分条件が知られている．

Lemma 7.14 ([GH])**.** $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ とし，(p, τ) を (f_t) により生成される BP^d の元とする．$\tau \in \overline{\mathbb{D}}$ が定数であると仮定する．ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在し，全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対して

$$C_1 < \operatorname{Re} p(z, t) < C_2$$

が満たされれば $\Omega[(f_t)] = \mathbb{C}$ である．

この 2 つの不等号は両者とも本質的である．$\tau \equiv 1$ とした場合，$f^1_t(z) := -t + \log(z + 1)$ と $f^2_t(z) := z - \arctan t$ の 2 つの例がそれを示している．実際，f^1_t の Herglotz function は $p_1(z, t) := z + 1$，f^2_t の Herglotz function は $p_2(z, t) := 1/(1 + t^2)$ となる．τ が一般の場合にも同様の条件が $\Omega[(f_t)] = \mathbb{C}$ を保証するかは知られていない．一方で $p \in \mathrm{HF}^d$ に少し強い条件を課せばそれは言えることが示されている．

Lemma 7.15 ([Hot])**.** $(f_t) \in \mathrm{LC}^d$ とし，(p, τ) を (f_t) により生成される BP^d の元とする．ある定数 $k \in [0, 1)$ が存在し，全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対して

$$\left| \frac{1 - p(z, t)}{1 + p(z, t)} \right| \le k$$

が満たされれば $\Omega[(f_t)] = \mathbb{C}$ である．

参考文献

[Ale76] I. A. Aleksandrov, *Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsii*, Izdat. “Nauka”, Moscow, 1976.

[BCDM09] F. Bracci, M. D. Contreras, and S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation. II. Complex hyperbolic manifolds*, Math. Ann. **344** (2009), no. 4, 947–962.

[BCDM12] ———, *Evolution families and the Loewner equation. I. The unit disc*, J. Reine Angew. Math. **672** (2012), 1–37.

[BCDMV14] F. Bracci, M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, and A. Vasil'ev, *Classical and stochastic Löwner-Kufarev equations*, Harmonic and complex analysis and its applications, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Cham, 2014, pp. 39–134.

[Bie16] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, S.-B. Preuss. Akad. Wiss **138** (1916), 940–955.

[BP78] E. Berkson and H. Porta, *Semigroups of analytic functions and composition operators*, Michigan Math. J. **25** (1978), no. 1, 101–115.

[CDMG10] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, and P. Gumenyuk, *Loewner chains in the unit disk*, Rev. Mat. Iberoam. **26** (2010), no. 3, 975–1012.

[dB85] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. **154** (1985), no. 1-2, 137–152.

[dMG] A. del Monaco and P. Gumenyuk, *Chordal Loewner equation*, preprint (arXiv:1302.0898).

[EE01] C. J. Earle and A. L. Epstein, *Quasiconformal variation of slit domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 11, 3363–3372 (electronic).

[ES10] M. Elin and D. Shoikhet, *Linearization models for complex dynamical systems*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 208, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[GH] P. Gumenyuk and I. Hotta, *Chordal Loewner chains with quasiconformal extensions*, preprint.

[Hot] I. Hotta, *L^d-loewner chains with quasiconformal extensions*, preprint.

[Kat07] M. Katori, *Schramm-Loewner Evolution (SLE) and Conformal Restriction*, 保型形式・無限可積分系合同合宿 講演ノート (2007), available at "http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/?research_ document".

[Koe07] W. Koepf, *Bieberbach's conjecture, the de Branges and Weinstein functions and the Askey-Gasper inequality*, Ramanujan J. **13** (2007), no. 1-3, 103–129.

[KSS68] P. P. Kufarev, V. V. Sobolev, and L. V. Sporyševa, *A certain method of investigation of extremal problems for functions that are univalent in the half-plane*, Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat. **200** (1968), 142–164.

[Kuf46] P. P. Kufarev, *On integrals of a simplest differential equation with movable polar singularity in the right-hand side*, Tomsk. Gos. Univ. Uchen. Zap. **1** (1946), 35–48.

[Kuf47] ———, *A remark on integrals of Löwner's equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 57, 1947, pp. 655–656 (in Russian).

[Law05] G. F. Lawler, *Conformally invariant processes in the plane*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 114, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Loe88] C. Loewner, *Collected papers*, Contemporary Mathematicians, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988, Edited and with an introduction by Lipman Bers.

[Löw23] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I*, Mathematische Annalen **89** (1923), no. 1, 103–121.

[Oza85] M. Ozawa, *Bieberbach* 予想の解決について, 数学 **37** (1985), no. 2, 164–168.

[Pom65] Ch. Pommerenke, *Über die Subordination analytischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **218** (1965), 159–173.

[Pom75] ______, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[Pop54] N. V. Popova, *Connection between the löwner equation and the equation* $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{w-\lambda(t)}$, Izv. Acad. Sci. Belorussian SSR **6** (1954), 97–98.

[Sch00] O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math. **118** (2000), 221–288.

[Won14] C. Wong, *Smoothness of Loewner slits*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 3, 1475–1496.