

多変数の複素力学系

Topics in Complex Analysis 1993

まえがき

この資料集は、多変数の複素力学系に関する最近の諸結果を、京都多変数函数論セミナーの構成員が分担して解説したものです。複素力学系の研究は、複素多様体から自分自身への解析写像とその iterates の挙動を対象とするものと考えられますが、ここでとりあげているのは、

- (A) C^2 の多項式自己同型写像 (1, 2, 3),
- (B) C^n からそれ自身への正則写像, 正則自己同型写像 (4, 5)
- (C) 複素射影空間 P^n からそれ自身への正則写像 (6)

に関するものです。

各解説は独立に書いたもので、定義や結果など重複する部分もあり、また用語も統一されていないところもあります。

なお、この資料集の出版にあたっては、平成5年度科学研究費補助金重点領域研究(1)「無限可積分系」(研究代表者：京都大学理学部・上野健爾)からの補助を受けました。

- | | |
|-------|--------------|
| 足立幸信 | (姫路学院女子短大) |
| 平井悦子 | (京都産業大理学部) |
| 柏原紘子 | (大阪府立大総合科学部) |
| 西村保一郎 | (大阪医科大) |
| 寺田俊明 | (滋賀医科大) |
| 上田哲生 | (京都大総合人間学部) |

目次

1. C^2 の多項式自己同型群の構造 1 - 11
2. 複素領域でのエノン写像 13 - 22
3. C^2 の多項式自己同型の作る力学系 - ポテンシャル論的方法 23 - 69
4. C^n から C^n への正則写像について 71 - 81
5. 吸引不動点と Fatou - Bieberbach 領域 83 - 89
6. 射影空間上の正則写像の力学系 91 - 117

\mathbb{C}^2 の多項式自己同型群の構造

柏原 紘子 (大阪府立大総合科学部)

0. 序

本稿は S. Friedland and J. Milnor : Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, Ergodic Th. and Dynamical Syst. 9 (1989),67-99 の §2 の紹介である.

\mathbb{C}^2 の多項式自己同型全体のなす群を G で表す. 群 G の元 g は x, y の多項式の組によって

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$$

の形に表される. 多項式 X, Y の次数の大きい方を g の次数 $\deg g$ と定義する.

単純な多項式自己同型写像として次の定義をする.

(1) アフィン変換

$$(x, y) \mapsto (\lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \kappa_1, \lambda_{21}x + \lambda_{22}y + \kappa_2)$$

ここで $\lambda_{ij}, \kappa_i \in \mathbb{C}, \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} \neq 0$. 明らかに, G の元 g がアフィン変換であることと $\deg g = 1$ なることは同値である. アフィン変換全体は (6次元の) 群 $\subset G$ をなす. これを A で表す.

(2) 初等写像 (elementary map)

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + p(y), \beta y + \gamma)$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \alpha\beta \neq 0, p(y)$ は多項式. これは水平な直線族 ($y = \text{定数}$) を水平な直線族に写すという性質で特徴づけられる. 初等写像全体は群 $\subset G$ をなす. これを E で表す.

(3) 一般 Hénon 写像

$$(x, y) \mapsto (y, p(y) - \delta x)$$

ここで $\delta \in \mathbb{C}, \delta \neq 0, p(y)$ は2次以上の多項式. これは初等写像 $(x, y) \mapsto (p(y) - \delta x, y)$ とアフィン変換 $t: (x, y) \mapsto (y, x)$ の積 (合成) で表されることに注意しておこう.

2つの自己同型 $g, g' \in G$ が共役であるとは $k^{-1} \circ g \circ k = g'$ なる $k \in G$ が存在することをいう.

主定理 任意の $g \in G$ は次の (a) または (b) に共役である :

- (a) $g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$ ここで各 g_i は一般 Hénon 写像 ;
- (b) アフィン写像または初等写像.

1. 主定理の証明

出発点は Jung の定理である

Jung の定理 C^2 の多項式自己同型群 G は A と E とで生成される.

この定理の証明は [J], [G], [Mck2], [N], [F], [S], [W] に与えられている. 筆者も [K] において幾何学的見地から別証を得た. (§3 参照.)

さて主定理の証明である. まず G が A と E とで生成されているという状勢を詳細に見よう. $S = A \cap E$ とする. これは 5 次元の群となる.

定義 1.1 $n (\geq 1)$ 個の G の元の組 (g_1, \dots, g_n) が $g \in G$ を表す長さ n の被約語 (reduced word) であるとは, $g = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$ であって次の条件が満たされることをいう :

- (1) 各因子 g_i は $A \setminus S$ または $E \setminus S$ に属している ;
- (2) 引き続き 2 つの因子が同時に $A \setminus S$ に属することまたは同時に $E \setminus S$ に属することはない.

以下では簡単のために, 積 $g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$ が被約語であるという言い方をする.

Jung の定理より直ちに

命題 1.2 G のすべての元は, S に属さない限り, 被約語によって表される.

主定理の証明は, 次の初等的かつ基本的定理に基づく.

定理 1.3 任意の被約語 $g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$ の次数は, 因子 g_i の次数の積に等しい.

証明はこの節の終わりにする. この定理より直ちに, $\deg g^{-1} = \deg g$ を得る. 次の系も重要である.

系 1.4 どの被約語も G の単位元に等しくない.

系 1.5 $g \in G \setminus S$ の被約語 $g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$ による表現は, 次の操作の繰り返しを除いて一意的である : 任意の i ($2 \leq i \leq n$) および $s \in S$ をとって g_i を $g_i \circ s$ で, g_{i-1} を $s^{-1} \circ g_{i-1}$ で置き替える.

注意 1.6 これより $g \in G \setminus S$ を被約語の形に表すときの長さ, および各 g_i の次数は g の不変量であることがわかる.

定義 1.7 $g \in G \setminus A$ の多重次数を次のように定義する : g を表現する被約語をとる. 各因子の次数の列 $(\deg g_1, \dots, \deg g_n)$ から 1 をすべて取り除き, 改めて順に番号をつけた列 (d_1, \dots, d_m) を g の多重次数という.

さて、群 G の共役類に対して標準形を見出す問題にとりかかろう。

注意 1.8 (1) 一般に、 G の元の積 $g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$ と、その因子に巡回置換をほどとしたもの $g_i \circ \cdots \circ g_1 \circ g_n \circ \cdots \circ g_{i+1}$ とは互いに共役である。

(2) 被約語 $g = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$ の長さ n が 3 以上の奇数のとき、両端の因子 g_1, g_n は同時に $A \setminus S$ または $E \setminus S$ に属するから、因子を巡回置換したものは長さが n より短い被約語に帰着される。長さが偶数のときは因子を巡回置換したものは同じ長さの被約語である。

定義 1.9 長さが偶数の被約語を巡回被約語 (cyclically reduced word) という。巡回被約語で表される元を巡回被約元 (cyclically reduced element) という。

群 G の一つの共役類 C を固定して考える。 C が A の元または E の元を含むならば主定理の (b) の場合である。 そうでないときは、 C の元はすべて長さ ≥ 2 の被約語で表される。 C のなかに必ず巡回被約元が含まれることに注意しよう。 実際、注意 1.8 より C に含まれる最も短い被約語は長さが偶数である。

注意 1.10 g, g' を互いに共役な巡回被約元とする。 $g = g_n \circ \cdots \circ g_1$ と表されるとすればある $s \in S$ がとれて $g' = s^{-1} \circ g_i \circ \cdots \circ g_1 \circ g_n \circ \cdots \circ g_{i+1} \circ s$ と表される。 特に、 g, g' は被約語として長さが等しく、多重次数は巡回置換を除いて一致する。

次の定理から主定理が得られる：

定理 1.11 G の巡回被約元は一般 Hénon 写像

$$g_i(x, y) = (y, p_i(y) - \delta_i x), \quad i = 1, \dots, m$$

の積 $g_m \circ \cdots \circ g_1$ に (アフィン変換によって) 共役である。 さらに多項式 $p_i(y)$ の最高次係数を 1、その次の係数を 0 ととることが出来る。 一つの共役類に対して、この標準形は有限個を除いて一意に定まる。

注意 1.12 (1) 多重次数 (d_1, \dots, d_m) の標準形は丁度 $d_1 + \cdots + d_m$ 個のパラメータに依存する。

(2) この標準形の次数は $d_1 d_2 \cdots d_m$ で与えられる。

系 1.13 素数次数をもつ元 $g \in G$ に対して、適当な $a \in A$ をとれば $a^{-1} \circ g \circ a$ は一般 Hénon 写像または初等写像となる。

(定理 1.3 の証明) 被約語 $g = g_n \circ \cdots \circ g_1$ の長さ n に関する帰納法によって次の (1), (2) を証明する：

(1) $\deg g = \prod_{i=1}^n \deg g_i$

(2) $g : (x, y) \mapsto (X(x, y), Y(x, y))$ とするとき、

$$g_n \in A \setminus S \text{ ならば } \deg X \leq \deg Y = \deg g;$$

$$g_n \in E \setminus S \text{ ならば } \deg g = \deg X > \deg Y.$$

まず $n = 1$ の場合は明かである. (1), (2) が長さ n の

$$g = g_n \circ \cdots \circ g_1 : (x, y) \mapsto (X(x, y), Y(x, y))$$

について成り立つとして, 長さ $n + 1$ の

$$g' = g_{n+1} \circ g : (x, y) \mapsto (X'(x, y), Y'(x, y))$$

についても成り立つことを示そう.

(i) $g_{n+1} \in E \setminus S$ ならば $g_n \in A \setminus S$, また

$$g_{n+1} : (x, y) \mapsto (\alpha x + p(y), \beta y + \gamma), \quad \deg g_{n+1} = \deg p \geq 2.$$

と表されるから

$$\begin{aligned} \deg X' &= \deg(\alpha X + p(Y)) = \deg p \deg Y = \deg g_{n+1} \deg g, \\ \deg Y' &= \deg(\beta Y + \gamma) = \deg Y = \deg g \end{aligned}$$

よって $\deg g' = \deg g_{n+1} \deg g = \deg X' > \deg Y'$

(ii) $g_{n+1} \in A \setminus S$ ならば $g_n \in E \setminus S$, また

$$g_{n+1} : (x, y) \mapsto (\lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \kappa_1, \lambda_{21}x + \lambda_{22}y + \kappa_2) \quad \lambda_{21} \neq 0$$

と表されるから

$$\begin{aligned} \deg X' &= \deg(\lambda_{11}X + \lambda_{12}Y + \kappa_1) \leq \deg X = \deg g, \\ \deg Y' &= \deg(\lambda_{21}X + \lambda_{22}Y + \kappa_2) = \deg X = \deg g. \end{aligned}$$

よって $\deg g' = \deg g = \deg Y' \geq \deg X'$. (証明終)

(注意 1.10 の証明) g と g とが k が長さ m の被約語によって共役であると仮定する:

$$g' = k_m \circ \cdots \circ k_1 \circ g_n \circ \cdots \circ g_1 \circ k_1^{-1} \circ \cdots \circ k_m^{-1}$$

このとき

(i) g_1, k_1 は同時に $A \setminus S$ または $E \setminus S$ に属する.

(ii) g_n, k_1 は同時に $A \setminus S$ または $E \setminus S$ に属する.

のどちらかが成り立つ.

(i) の場合には $g_1 \circ k_1^{-1} \in S$ である. (そうでなければ

$$g' = k_m \circ \cdots \circ k_1 \circ g_n \circ \cdots \circ (g_1 \circ k_1^{-1}) \circ k_2^{-1} \cdots \circ k_m^{-1}$$

は長さ奇数の被約語となり仮定に反する.) $s = g_1 \circ k_1^{-1}$ おくと

$$g' = k_m \circ \cdots \circ k_2 \circ s^{-1} \circ g_1 \circ g_n \circ \cdots \circ g_2 \circ s \circ k_2^{-1} \cdots \circ k_m^{-1}$$

即ち, g' と $g_1 \circ g_n \circ \cdots \circ g_2$ とは長さ $m-1$ の被約語によって ($m=1$ のときは S の元によって) 共役. これを繰り返せば命題を得る. (ii) の場合も同様. (証明終)

(定理 1.11 の証明) まず, アフィン変換 t を $t: (x, y) \mapsto (y, x)$ で定めるとき, $S \circ t \circ S = A \setminus S$ なることは容易に確かめられる.

任意の巡回被約元はアフィン変換によって

$$a_m \circ e_m \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1 \quad a_i \in A \setminus S, e_i \in E \setminus S$$

に共役である. さらに $a_i = s_i \circ t \circ s'_i$, $s_i, s'_i \in S$ と表されるから, これは

$$g = (t \circ e'_m) \circ (t \circ e'_{m-1}) \circ \cdots \circ (t \circ e'_1)$$

に共役である. $m+1$ 組の変数を導入して g を

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{t \circ e'_1} (x_1, y_1) \xrightarrow{t \circ e'_2} \cdots \xrightarrow{t \circ e'_{m-1}} (x_{m-1}, y_{m-1}) \xrightarrow{t \circ e'_m} (x_m, y_m)$$

と表す. ここで

$$t \circ e'_i: (x_{i-1}, y_{i-1}) \mapsto (x_i, y_i) = (\beta_i y_{i-1} + \gamma_i, \alpha_i x_{i-1} + p_i(y_{i-1})), \quad i = 1, \dots, m.$$

いま次のような変換をとる:

$$s_i: (x_i, y_i) \mapsto (\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (x_i, \beta_{i+1} y_i + \gamma_{i+1}) \quad i = 0, \dots, m$$

ただし, $\beta_{m+1} = \beta_1$, $\gamma_{m+1} = \gamma_1$, 従って $s_m = s_0$. このとき

$$h_i = s_i \circ (t \circ e'_i) \circ s_{i-1}^{-1}: (\hat{x}_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) \mapsto (\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (\hat{y}_{i-1}, \delta_i \hat{x}_{i-1} + q_i(\hat{y}_{i-1}))$$

ただし $\delta_i \neq 0$, q_i は $d_i = \deg p_i$ 次の多項式. 従って

$$s_0 \circ g \circ s_0^{-1} = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1$$

は一般 Hénon 写像の積となる.

次に, 記号を改めて, $g = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1$ を一般 Hénon 写像

$$h_i: (x_{i-1}, y_{i-1}) \mapsto (x_i, y_i) = (y_{i-1}, \delta_i + q_i(y_{i-1})) \quad (i = 1, \dots, m)$$

の積とする. これがアフィン写像による共役で標準化できることを示そう.

(a) まず, q_i の d_i-1 次の係数を 0 にしたい. 各 q_i の d_i-1 次導関数の零点を c_i とし, 次の変換をとる:

$$s_i: (x_i, y_i) \mapsto (\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (x_i - c_i, y_i - c_{i+1}) \quad (i = 0, \dots, m)$$

ただし, $c_0 = c_m$, $c_{m+1} = c_1$, 従って $s_m = s_0$. このとき

$$h'_i = s_i \circ h_i \circ s_{i-1}^{-1}: (\hat{x}_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) \mapsto (\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (\hat{y}_{i-1}, \delta_i \hat{x}_{i-1} + q'_i(\hat{y}_{i-1}))$$

において q_i の $d_i - 1$ 次の係数は 0 で,

$$s_0 \circ g \circ s_0^{-1} = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1.$$

となる.

(b) 次に, q_i の最高次係数を 1 にしたい. 次の変換をとる:

$$s_i : (x_i, y_i) \mapsto (\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (x_i/\eta_i, y_i/\eta_{i+1}) \quad (i = 0, \dots, m)$$

ただし, $\eta_0 = \eta_m$, $\eta_{m+1} = \eta_1$; 従って $s_m = s_0$. このとき

$$h'_i = s_i \circ h_i \circ s_{i-1}^{-1} : (\hat{x}_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) \mapsto (\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (\hat{y}_{i-1}, \delta'_i \hat{x}_{i-1} + q'_i(\hat{y}_{i-1}))$$

ここで, $q'_i(\hat{y}_{i-1}) = q_i(\eta_i \hat{y}_{i-1})/\eta_{i+1}$. この最高次係数が 1 となるためには

$$\eta_{i+1} = \kappa_i \eta_i^{d_i} \quad (i = 0, \dots, m)$$

が成り立てばよい. ただし κ_i は q_i の最高次係数. η_1 は $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ の或る単項式の $d_1 \cdots d_m - 1$ 乗根で, その 1 つをとれば他の η_i は一意的に決まる.

最高次の次の係数が 0 であるという性質は (b) の操作によって不変だから (a), (b) を引き続いて行って求める標準を得る.

2. 群 G の多様体への分解

この節では, G が, 滑かな多様体の合併として表されることを示そう.

補題 2.1 多重次数 (d_1, d_2, \dots, d_m) をもつ G の元の全体を $G[d_1, d_2, \dots, d_m]$ とすると, これは $d_1 + d_2 + \cdots + d_m + 6$ 次元の滑かな多様体である.

この補題によって G は互いに交わらない滑かな代数多様体の合併

$$A \cup G[2] \cup G[3] \cup G[2, 2] \cup G[4] \cup G[2, 3] \cup G[3, 2] \cup G[5] \cup \cdots$$

で与えられる.

(証明) まず, 商空間 A/S と射影直線 P^1 とを同一視できることに注意する. 実際, S の元は水平な直線族 ($y = \text{定数}$) を水平な直線族に写し, 各 $a \in A$ は水平な直線族を互いに平行な直線族に写す. 従って, 剰余類 $a \circ S$ と平行直線族の全体 $\simeq P^1$ とは 1 対 1 に対応する.

$$F[d_1, \dots, d_m] = \{f = e_m \circ a_{m-1} \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1, e_i \in E \setminus S, a_i \in A \setminus S, \deg e_i = d_i\}$$

とおくと $G[d_1, \dots, d_m]$ の元は $a' \circ f \circ a$ の形に表せる. このとき a, a' は一意的には定まらないが剰余類 $a^{-1} \circ S, a' \circ S \in A/S$ は定まる. 従って, $\pi(a' \circ f \circ a) = (a^{-1} \circ S, a' \circ S)$ によって $F = F[d_1, \dots, d_m]$ をファイバーとするファイバー束

$$\pi : G[d_1, d_2, \dots, d_m] \rightarrow P^1 \times P^1$$

が定まる.

$$f = e_m \circ a_{m-1} \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1 \in F \text{ において } a_i = s_i \circ t \circ s'_i$$

$$f = e'_m \circ t \circ e'_{m-1} \circ \cdots \circ t \circ e'_1$$

と表される.

$$\hat{E} = \{\hat{e}(x, y) = (x + p(y), y); p(0) = 0\} \subset E$$

$$\hat{S} = \{\hat{s}(x, y) = (\alpha x + \alpha', \beta y + \beta')\} \subset S$$

とおくと, 次の補題は容易に示される:

補題 2.2 任意の $f \in F = F[d_1, \dots, d_m]$ は次の型の被約語として一意的に表せる:

$$(\hat{s}_m \circ \hat{e}_m) \circ t \circ \cdots \circ t \circ \hat{e}_1; \quad \hat{s}_m \in \hat{S}, \hat{e}_i \in \hat{E}.$$

従って F は $(d_1 + \cdots + d_m + 4)$ 次元の座標空間の開集合と見なされる.

これによって補題 2.1 の証明は完成する.

注意 2.3 g を $G[d_1, d_2, \dots, d_m]$ の元とする. 像 $\pi(g)$ が $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ の対角集合上の点でないことと, g がアフィン写像によって多重次数 (d_1, d_2, \dots, d_m) の巡回被約語と共役であることは同値である.

(証明) $\pi(a' \circ f \circ a)$ ($f = e_m \circ a_{m-1} \circ \cdots \circ e_1$) が対角集合上になければ $a \circ a' \notin S$. 従って $a' \circ f \circ a$ は巡回被約語 $a \circ a' \circ f$ と a によって共役である. $\pi(a' \circ f \circ a)$ が対角集合上にあれば $a \circ a' \in S$. 従って $a' \circ f \circ a$ は $a_{m-1} \circ \cdots \circ (e_1 \circ a \circ a' \circ e_m)$ と共役. これはより短い被約語で表される. (証明終)

3. Hénon 写像の幾何学的背景

1. Jung の定理の別証明を, 筆者は [K] において与えた. この立場からは “一般 Hénon 写像の積” が必然的に現れる. その幾何学的背景が面白いと思うので, ここで証明をスケッチしよう. (紙数の都合上, 用語の説明は最小限度にしておく.)

\mathbf{C}^2 上の多項式関数 $R(x, y)$ で次の性質を持つものの全体を \mathcal{F} で表す:

任意の $a \in \mathbf{C}$ について, 定数面 $\{R(x, y) = a\}$ は既約, 非特異, かつ \mathbf{C} に同型. またこの上で $R - a$ は一位の零をとる.

\mathcal{F} の元のうち 1 次式の全体を \mathcal{F}_0 で, 2 次以上の多項式全体を他を \mathcal{F}_I で表す.

\mathbf{C}^2 の自己同型写像 $g \in G$ を $(x, y) \mapsto (X(x, y), Y(x, y))$ とすると, 多項式 X, Y は \mathcal{F} に属することに注意しよう. 逆に

定理 3.1 $R \in \mathcal{F}$ に対して, 適当な $R' \in \mathcal{F}$ をとると $(R', R) \in G$ とできる. $R \in \mathcal{F}_I$ のときは $\deg R' < \deg R$ なるものがとれる. このような R' のとり方は整一次変換を除いて (即ち, R' の代わりに $aR' + b$ をとることを除いて) 一意的である.

証明は 2 で行う。

系 3.2 $R \in \mathcal{F}_1$ に対して, 適当な $R' \in \mathcal{F}$, さらに R' に対して $R'' = (R')' \in \mathcal{F}$ をとると

$$R = \alpha R'' + p(R')$$

が成り立つ. ここに $\alpha \neq 0$, $p(x)$ は 2 次以上の多項式. このとき最高次係数は 1, 最高次の次の係数は 0 となるように出来る.

(証明) $(R'', R') \in G$ より, $x_1 = R'', y_1 = R'$ とすれば R は x_1, y_1 の多項式として書けるから, x_1 で整理すれば

$$R(x, y) = R^*(x_1, y_1) = a_0 x_1^l + a_1(y_1) x_1^{l-1} + \cdots + a_l(y_1)$$

一方, $(R', R) \in G$. すなわち任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して $R'(x, y) (= y_1)$ の $\{R(x, y) = c\} = \{R^*(x_1, y_1) = c\}$ への制限は単葉である. 故に $l = 1$. R' を適当な aR' にとりかえることによって, p の最高次係数は 1 となる. その a のとり方は $d = \deg p$ 個である. さらに最高次の次の係数が 0 なる条件 $(p^{(d-1)}(0) = 0)$ は R' をさらに適当な $R' + b$ にとりかえることによって成立する.

注意 3.3 $p(x)$ の標準化は R'' のとり方に依らない. また上のような R' は有限個を除いて一意に決まる.

この対 $[R', R]$ を標準対とよぶ.

系 3.4 $\deg R = \deg R' \deg p$.

この系より, $\deg R$ が素数ならば $R' \in \mathcal{F}_0$ である.

系 3.5 $R \in \mathcal{F}_1$, 標準対 $[R', R]$, $R' \in \mathcal{F}_0$ とする. このとき, 適当な $a \in A$ と 2 組の変数を導入すれば $g = (R', R)$ は

$$(x, y) \xrightarrow{a} (x_0, y_0) \xrightarrow{h_1} (x_1, y_1) = (y_0, \alpha_1 x_0 + p_1(y_0))$$

と書ける. ただし, $\alpha_1 \neq 0, p_1(y_0)$ は次数 $= \deg R > 1$ の多項式で標準化されている.

注意 3.6 (1) h_1 は Hénon 写像.

(2) $R' = \lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \kappa_1$ とするとき, $\lambda_{12} \neq 0$ なら $R'' = \lambda_{21}x + \kappa_2$, $\lambda_{12} = 0$ なら $R'' = \lambda_{22}y + \kappa_2$ として $a = (R'', R') \in A$ とすればよい.

定理 3.7 $g = (X(x, y), Y(x, y)) \in G$ に対して, 多項式 X, Y の次数の高い方を R とし, 標準対 $[R', R]$ をとると, 他方は $pR' + qR + r$ と書ける. ただし, $p, q, r \in \mathbb{C}$, $p \neq 0$.

証明は系 3.2 と同様に出来る.

注意 3.8 $\deg X \leq \deg Y$ のとき $a' = (px + qy + r, y)$ (等号のときのみ $q \neq 0$). $\deg X > \deg Y$ のとき $a' = (y, px + r)$, $g_0 = (R', R)$ とすれば $g = a' \circ g_0$.

従って、定理 3.1 を認めれば Jung の定理の別証が得られたことになる。ここにまとめておく：

$g = (X(x, y), Y(x, y)) \in G$ に対して、多項式 X, Y の次数の高い方を R とする。 $R \in \mathcal{F}_I$ のとき、有限個の標準対 $[R_{N-1}, R], [R_{N-2}, R_{N-1}], \dots, [R_0, R_1]$ とアフィン写像 a, a' を得る。 $N+1$ 組の変数を導入すると、 R_i, R_{i-1}, R_{i-2} に対して系 3.2 の等式より、Hénon 写像

$$h_i : (x_{i-1}, y_{i-1}) \mapsto (x_i, y_i) = (y_{i-1}, \alpha_i x_{i-1} + p_i(y_{i-1}))$$

を得る； $p_i(y_{i-1})$ は $\deg R_i / \deg R_{i-1} (> 1)$ 次の多項式。このとき、 g は

$$g = a' \circ h_N \circ h_{N-1} \circ \dots \circ h_1 \circ a$$

と表される。

注意 3.9 上の式から主定理を導くことも難しくない。

2 定理 3.1 の証明をするために、 \mathbb{C}^2 をコンパクト化して考える：射影平面 \mathbb{P}^2 の同次座標を (u, v, w) として $L = \{w = 0\}$ を‘無限遠直線’とみなし、 $\mathbb{P}^2 \setminus L$ を \mathbb{C}^2 と同一視する。その座標を $(x, y) = (u/w, v/w)$ とする。

以下では $R \in \mathcal{F}$ を \mathbb{P}^2 上の有理関数 R と見なす。このとき、

- (1) R は L でのみ極をもつ。(その位数は多項式としての次数.)
- (2) 不定点は唯一つである。(これを p とする.)
- (3) 任意の $a \in \mathbb{C}$ について R の定数面の閉包 S_a は不定点 p を含む。

有理関数 $R \in \mathcal{F}$ の不定点 p において blowing up を有限回行って $\rho : M \rightarrow \mathbb{P}^2$ とする。 $R \circ \rho$ が不定点を持たないような (M, ρ) のうちで最小のものをとる。 $\Sigma = \rho^{-1}(p)$ とし、 L の ρ^{-1} による固有変換像 (proper transform) を \hat{L} で表すと $\rho^{-1}(L) = \Sigma \cup \hat{L}$ 。

最後の blowing up によって入った成分を Γ とするとその自己交点数 $(\Gamma^2) = -1$ 。それ以外の Σ の成分の自己交点数は ≤ -2 。また、

$$R \circ \rho : M \rightarrow \mathbb{P}^1$$

によって M を rational ruled surface と見なすとき、 Γ は global section であり、 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 上のファイバー $F_\infty = (R \circ \rho)^{-1}(\infty)$ は Σ の Γ 以外の成分と \hat{L} からなる： $F_\infty = (\overline{\Sigma \setminus \Gamma}) \cup \hat{L}$ 。 $M \setminus \rho^{-1}(L) = M \setminus (\Gamma \cup F_\infty)$ は ρ によって $\mathbb{P}^2 \setminus L = \mathbb{C}^2$ と双正則であることに注意する。

F_∞ が既約でないとき、その成分の blowing down $\eta : M \rightarrow \eta(M)$ によって $\eta(F_\infty)$ が自己交点数 0 の既約曲線となるようにできる。しかも $\eta(\Gamma)$ の自己交点数 0 とできる。

このとき ruled surface $R \circ \rho \circ \eta^{-1} : \eta(M) \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に双正則である。

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \eta(M)$ の座標 (z, w) を、

$$R \circ \rho = z \circ \eta$$

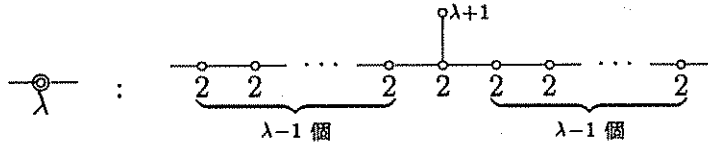
かつ $\eta(\Gamma)$ が $\{w = \infty\}$ で与えられるようにとることが出来る。このとき

$$R' \circ \rho = w \circ \eta$$

によって P^2 上の有理関数 R' を定義すれば $R' \in \mathcal{F}$ で $(R, R') \in G$ となる. w のとり方は, 従って R' のとり方も, 整一次変換を除いて一意である.

3. 先に述べた $\rho: M \rightarrow P^2$ および $\eta: M \rightarrow P^1 \times P^1$ を具体的に記述しよう. 次のような記号を用いる:

- : Σ の既約成分を表す. (下の数は -(自己交点数).)
- : \hat{L} を表す.
- : 2つの既約成分が正規交差すること (normal crossing) を表す.

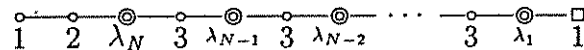


定理 3.10 $R \in \mathcal{F}$ とする. $\rho^{-1}(L)$ のグラフはつぎのどれかである. 逆に, P^2 の blowing up ρ によって生ずる $\rho^{-1}(L)$ のグラフがこの形であれば, 対応する $R \in \mathcal{F}$ は必ず存在する.

$R \in \mathcal{F}_0$ のとき, $I(0)$:



$R \in \mathcal{F}_I$ のとき, $I(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$:

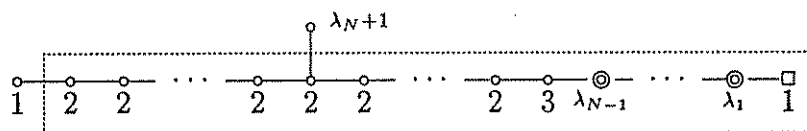


ここで $N \geq 1, \lambda_j$ は整数 ≥ 1 .

定理 3.11 $R \in \mathcal{F}$ の次数は $n = \prod_{i=1}^N (\lambda_i + 1)$ で与えられる.

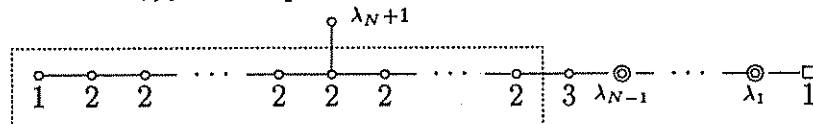
以後, R が $I(0)$ または $I(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ に属するとは, その $\rho^{-1}(L)$ のグラフが対応するクラスに属することをいう.

$R \in I(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ を考えよう.



上図の \square の部分は exceptional である. さきに述べた $\eta: M \rightarrow \eta(M)$ はこれを blow down する写像である. これによってグラフは $\circ \text{---} \circ$ に帰着する.

さて, 次図の \square の部分も exceptional である.



これを blow down する写像を $\eta': M \rightarrow \eta'(M)$ とする. これによってグラフは $I(N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ に帰着する.

命題 3.12 $R \in I(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ に対して定理 3.1 の R' をとると次が成り立つ: $R' \in I(N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ しかも R' の不定点解消は $(\eta'(M), \eta'(\Sigma), \rho \circ \eta'^{-1})$ である.

参考文献

- [BCW] H. Bass, E. H. Connell and D. Wright : The Jacobian Conjecture: reduction of degree and expansion of the inverse, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 287-330.
- [F] M. Furushima: Finite groups of polynomial automorphisms in the complex affine plane (I), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 36 (1982), 85-105.
- [G] Gutwirth (Evyatar), An inequality for certain pencils of plane curves, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 631-638.
- [J] H. W. E. Jung: Über ganze birationale transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. 184 (1942), 161-174.
- [K] Kashiwara: Fonctions rationnelles de type (0,1) sur le plan projectif complexe, Osaka J. Math. 24 (1987)
- [M] J. H. McKay and S. S. Wang: An elementary proof of the automorphism theorem for the polynomial ring in two variables; to appear.
- [N1] M. Nagata: A theorem of Gutwirth, J. Math. Kyoto Univ 11(1971), 149-154.
- [N2] — : On rational surface I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1, Mem. Coll. Soc. Univ. Kyoto, Ser A32, Math. (1960) , 351-370.
- [S] M. Suzuki: Propriétés topologique des polynômes de deux variables complexes et automorphismes algébriques de l'espace \mathbb{C}^2 , J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 241- 257.
- [W] I. Wakabayashi: Automorphism group of \mathbb{C}^2 , preprint.

複素領域でのエノン写像

寺田俊明 (滋賀医科大学)

1 始めに

1.1 始めに C^2 の 2 次多項式写像, 特にエノン写像に関する J.H.Hubbard, R.Oberste-Vorth による preprint [23] の一部を紹介する。それには多くの疑問点があるので修正した。しかし該当部分が多すぎるので内容を大幅に変更した場合を除いてその都度の言及はしない。他の題材: Bieberbach 領域と多項式自己同型写像の標準型については本冊子 足立-平井による稿と重複するので省略する。証明は簡明を旨として, 幾何学的直感などで自明と思われる部分は論理的な厳密性にこだわらなかった。また, 次のような場合は証明を省略または簡略化した: たとえ長い計算を要するものでも一本道, 原文の証明が完全かつ簡潔, 他の分野の特殊な命題。

1.2 記号と定義 C^2 の点, 写像などを (x, y) , $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $F(x, y)$, $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ などと表す。縦ベクトル表示に統一するとすっきりするが環境問題を考慮し省資源のため両者を混同して用いた。考察の対象は

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + c - ay \\ x \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

によって定義される C^2 の正則自己同型写像で, エノン写像は, 共役を除いて, この形に帰着される。ただし, $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$, また一般に写像 F に対して F^n は F または F^{-1} の $|n|$ 回の合成を表す。そして $F^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^n(x, y) \\ F_2^n(x, y) \end{pmatrix}$ とする。

1.3 不変集合

$$U_+ = \{(x, y) \in C^2; \lim_{n \rightarrow \infty} \|F^n(x, y)\| = \infty\}, K_+ = C^2 \setminus U_+$$

$$U_- = \{(x, y) \in C^2; \lim_{n \rightarrow \infty} \|F^{-n}(x, y)\| = \infty\}, K_- = C^2 \setminus U_-$$

$$J_{\pm} = \partial K_{\pm}, K = K_+ \cap K_-, J = J_+ \cap J_-$$

とすると, これらは明らかに写像 F による不変集合で, それらの構造やコンパクト化などがここでの主役である。

1.4 エノン写像の代数的特性

定理 次数 2 の多項式による自己同型写像

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1x + c_1y + d_1x^2 + e_1xy + f_1y^2 \\ a_2 + b_2x + c_2y + d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2 \end{pmatrix}$$

はエノン写像または基本写像と共役である。 $G = G_0 + G_1 + G_2$ (G_i は i 次の斉次部分) とすると, $G_2(\mathbb{C}^2)$, $G_2^{-1}(O)$ は共に 1 次元線形部分多様体となるが, 両者が一致すれば基本写像, 異なればエノン写像となる。 2 次の基本写像は次の 4 種類である。

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx + y^2 \\ 1 + by \end{pmatrix} \quad (b \neq 0, 1), \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx + y^2 \\ 1 + dy \end{pmatrix} \quad (bd \neq 0),$$

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x + y^2 \\ dy \end{pmatrix} \quad (d \neq 0), \quad D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx + y^2 \\ 1 + y \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$$

基本写像の力学系は既知なのでエノン写像の性質が分かれば, 二次写像の iteration を調べ上げたことになる。

2 ソレノイド

2.1 定義と記号 $S_r^1 := \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| = r\}$, $D_r := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$, $S^1 := S_1^1$,
 $D := D^1$, $T_0 := S^1 \times D_2$

2.2 射影的極限による構成 $\sigma(\zeta) = \zeta^2$ による倍角写像 $\sigma: S^1 \rightarrow S^1$ についてソレノイド Σ と写像 $\hat{\sigma}: \Sigma \rightarrow \Sigma$ を次のように定義する。

$$\Sigma := \{\zeta = (\cdots, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_0); \sigma(\zeta_{i+1}) = \zeta_i, (i = 0, 1, 2, \cdots)\}$$

$$\hat{\sigma}(\cdots, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_0) = (\cdots, \sigma(\zeta_2), \sigma(\zeta_1), \sigma(\zeta_0)) = (\cdots, \zeta_1, \zeta_0, \sigma(\zeta_0))$$

Σ の点は $\zeta_0 \in S^1$ に σ の iteration によるその点の歴史を付加したものである。 さらに $\{z = (\cdots, z_2, z_1, z_0) \in \Sigma; |z_k - \zeta_k| < \varepsilon \quad (k \leq \frac{1}{\varepsilon})\}$ を $\zeta \in \Sigma$ の ε -近傍という。これに依って Σ は位相空間となり, $\hat{\sigma}^{-1}(\cdots, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_0) = (\cdots, \zeta_2, \zeta_1)$ だから $\hat{\sigma}$ は位相同型写像である。

2.3 定義 T を S^3 に unknotted に埋め込まれた solid torus とするとき, T 内に埋め込まれた円板の境界となっている ∂T 上の曲線を T -子午曲線, T の外部に埋め込まれた円板の境界となっている ∂T 上の曲線を T -緯度曲線と呼ぶことにする。

2.4 命題 T を S^3 に unknotted に埋め込まれた solid torus とすると, $S^3 \setminus \partial T$ の連結成分を交換する S^3 の involution ρ で, T -子午曲線を T -緯度曲線に, T -緯度曲線を T -子午曲線に写すものが存在する。

2.5 S^3 へのソレノイドの埋め込み 写像 $\tau_0: T_0 \rightarrow T_0$ を

$$\tau_0 \begin{pmatrix} \zeta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \zeta + \varepsilon z \zeta^{-1} \end{pmatrix} \quad (0 < \varepsilon < \frac{1}{2}),$$

で定義する。 T_0 を S^3 に unknotted solid torus として埋め込んで T とすると、 τ_0 は自然に T 上の写像とみなされる。このとき $\tau_0(T)$ も S^3 に unknotted に埋め込まれており、 τ_0 により T の子午曲線と緯度曲線はそれぞれ $\tau_0(T)$ の緯度曲線と子午曲線に写される。また $\Sigma_+ := \bigcap_{n=0}^{\infty} \tau_0^n(T)$ とする。

$(\dots, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_0) \in \Sigma$ のとき $\bigcap_{n=0}^{\infty} \tau_0^n(\{\zeta_n\} \times D_2)$ は Heine-Borel の定理により唯一点を決め、この対応により Σ と Σ_+ は位相同型である。

2.6 命題 (2.5) の T 上の写像 τ_0 は向き付けを保存する写像

$$\tau : S^3 \rightarrow S^3$$

に拡張される。そして τ は τ^{-1} と共役である。

証明 拡張可能なことは次の補題 (2.7) による。 R^3 に 1 点を付け加えてコンパクト化し、 $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$ とする。 R^3 に二つの絡み合ったトーラス T_1 と T_2 が図のように、原点に関する対称移動 R によって T_1 と T_2 が交換されるように埋め込まれているとする。 T_1 の外部の solid torus を T_1 とし、 T_2 の内部を T_2 とすると、 S^3 の自己同型写像 λ で、 $\lambda(T) = T_1$ 、 $\lambda(\tau(T)) = T_2$ 、 $\lambda\tau\lambda^{-1} = R \circ \rho_1$ を満たすものが存在する。 ρ_1 は S^3 の T_1 に関する involution である。このとき $R^{-1} \circ (R \circ \rho_1)^{-1} \circ R = R \circ \rho_1$ だから τ は τ^{-1} と共役である。

2.7 補題 T_1 と T_2 が S^3 に unknotted に埋め込まれた 2 つの solid torus で $f : \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$ が T_1 - 子午曲線を T_2 - 子午曲線に写す同相写像ならば f は $T_1 \rightarrow T_2$ の同相写像に拡張される。

2.8 定義 $\Sigma_- := S^3 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(T)$ と $\Sigma_+ = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^n(T)$ をそれぞれ attractive ソレノイド, repelling ソレノイドという。

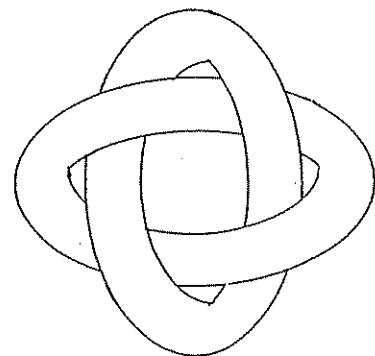
2.9 命題 τ は 2 つのソレノイド Σ_+ , Σ_- を不変にする。全ての点は、 τ の forward iteration により Σ_+ に、 backward iteration により Σ_- に吸引される。また、 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(T)$ は $S^3 \setminus \Sigma_+$ と位相同型である。

3 関数 $h_+(x, y)$ と $\varphi_+(x, y)$

3.1 定義と記号 $\alpha := \frac{1}{6|a|}$, $\beta := \sup\{\sqrt{2|c|}, 4\sqrt[3]{|a|}, 6|a|, 4\}$,

$V_+ := \{(x, y) \in \mathbb{C} ; |y| < \alpha|x|^2, |x| > \beta\}$,
 $W_+ := \{(x, y) \in \mathbb{C} ; |x| < \beta + 1, |y| < \beta\}$,
 $\log_+ := \sup\{\log, 0\}$,
 集合 S に対して \bar{S} は S の閉包。

3.2 補題 領域 V_+ は次の性質をもつ。



- (1) $V_+ \subset U_+$, $U_+ = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(V_+)$,
 (2) $F(\bar{V}_+) \subset V_+$,
 (3) $(x, y) \in V$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_1^n(x, y)| = \infty$
 (4) $F(W_+) \subset W_+ \cup V_+$
 (5) $(x, y) \notin W_+ \cup V_+$ ならば $|y| > |F_2(x, y)| (= |x|)$

3.3 注意 $(x, y) \notin V_+$, $b = \inf_n |F_2^n(x, y)|$ とすると, ある点 (x_0, y_0) ($|y_0| = b$) に収束する重複を許す部分列 $\{F^{m_n}(x, y)\}$ が存在する。 $(x_0, y_0) \notin W_+ \cup V_+$ なら (3.2.5) より $|y_0| > |x_0|$ 。よって十分大きな m_n に対して $|F_2^{m_n-1}(x, y)| < |y_0| = b$ となり, (3.2.5) に矛盾する。故に任意の点は十分大きな n に対して F^n により, $V_+ \cup W_+$ に写され, 従って,

$$K_+ = \{(x, y); \|F^n(x, y)\| \text{ が有界} \}$$

である。

3.4 命題 次の条件を満たす正則関数 $\varphi_+ : V_+ \rightarrow C \setminus \bar{D}$ が存在する。

$$\varphi_+(F(x, y)) = (\varphi_+(x, y))^2, \quad \varphi_+(x, 0) = x + O(1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

証明 巾乗は全て主枝を選ぶものとして

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((F_1^n(x, y))^{2^{-n}}) = x \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(F_1^{n+1}(x, y))^{2^{-n-1}}}{(F_1^n(x, y))^{2^{-n}}} \\ &= x \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{c - aF_2^n(x, y)}{(F_1^n(x, y))^2} \right]^{2^{-n-1}} \end{aligned}$$

とすると, $(x, y) \in V_+$ のとき $F^n(x, y) \in V_+$ で, $\left| \frac{c - ay}{x^2} \right| \leq \frac{|c| + |ay|}{|x^2|} < \frac{1}{6} + \frac{|c|}{|x|^2} < \frac{2}{3}$ なので, 右辺の無限積は V_+ で正則関数に収束する。 $\beta \geq 4$ より $|\varphi_+(x, y)| > 1$ も明らかである。

注意 [23] には (3.4) の φ_+ は証明無しに一意的と書かれている。

3.5 命題 $h_+(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log_+ |F_1^n(x, y)|$ は C^2 で連続, U_+ で多重調和で, さらに次の式が成立する。

$$h_+(F(x, y)) = 2h_+(x, y), \quad U_+ = \{(x, y); h_+(x, y) > 0\}$$

証明 $(x, y) \in K_+$ なら (3.4) 注意により $h_+(x, y) = 0$ 。 $(x, y) \in V_+$ なら $h_+(x, y) = \log |\varphi_+(x, y)|$ であり, 正則関数の実部だから h_+ は多重調和である。 $(x, y) \in U_+$ のとき $F^m(x, y) \in V_+$ となるような m が存在する。このとき $h_+(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-m}} \frac{1}{2^m} \log_+ |F_1^{n-m}(F^m(x, y))| = \frac{1}{2^m} h_+(x, y)$ である。これにより $h_+(x, y)$ は $F^{-m}(V_+)$ に拡張される。残るのは J_+ 上での連続性のみである。(3.4) 注意により任意の点は F の iteration によって $W_+ \cup V_+$ に写る

から, $J_+ \cap W_+$ で連続なことを示せば十分である。 V_+ と有界領域との共通部分で φ_+ は有界だから

$$C = \sup\{\log|\varphi_+(x, y)|; (x, y) \in F(W_+) \cap V_+\}$$

とすると, $(x, y) \in J_+ \cap W_+$ の十分小さな近傍 N に対して $(x', y') \in N \cap W_+ \cap U_+$ のときある m が存在して, $F^m(x', y') \in V_+$, $F^{m-1}(x', y') \notin V_+$ となる。このとき, $h_+(x', y') = \frac{1}{2^m} \log|\varphi_+(F^m(x', y'))| < \frac{C}{2^m}$ により $\bar{V} \subset F^{-1}(V)$ だから N を小さくすると $m \rightarrow \infty$ となる。

4 h_+ による U_+ の fibration

4.1 定義と記号 $V_+(r) := \{(x, y) \in V_+; h_+(x, y) = \log r\}$,

$$U_+(r) = V_+(r) \cup F^{-1}(V_+(r^2)) \cup F^{-2}(V_+(r^4)) \cup \dots$$

4.2 定理 写像 $h_+ : U_+ \rightarrow \mathbb{R}$ は, $S^3 \setminus \Sigma_+$ と位相同型な fiber をもつ自明な fibration である。

証明は命題 (4.8) の後で行う。

4.3 補題 十分大きな r に対して $V_+(r)$ は solid torus $S_r^1 \times D_\alpha$ と位相同型であり,

$$\varphi_z : V_+(r) \rightarrow \{\zeta; |\zeta| = r\}$$

は閉円板と位相同型な fibre をもつ fibration である。

証明 $|z| \leq \alpha$ を満たす z に対して $\varphi_z(x) := \varphi_+(x, zx^2)$ は $|x| > \beta$ で正則であって, φ_+ の積表現により $\varphi_z(x)$ は ∞ で 1 位の極をもつ。つまり

$$\varphi_z(x) = x \sqrt{1 + \frac{c - azx^2}{x^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = x \sqrt{1 - az} + o(1),$$

従って, 十分大きな r に対して $|\zeta| = r$ である ζ と $|z| \leq \alpha$ を満たす z に対して, $\varphi_+(x, y) = \zeta$, $y = zx^2$ を満たす点 $(x, y) \in V_+$ が唯一つ存在する。

故に次の写像

$$\psi : (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_+(x, y) \\ \frac{y}{x^2} \end{pmatrix}$$

は $V_+(r) \rightarrow S_r^1 \times D_\alpha$ の位相同型写像である。

4.4 補題 次の漸近展開が成り立つ。

$$(1) \quad \psi \circ F \circ \psi^{-1} \begin{pmatrix} \zeta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \frac{1}{\zeta^3 \sqrt{1 - az}} + O(|\zeta^{-5}|) \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \chi \begin{pmatrix} \zeta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 z \end{pmatrix}, \quad \psi_0 := \chi \circ \psi \circ F \circ \psi^{-1} \circ \chi^{-1} : S_r^1 \times D_\alpha \rightarrow S_r^1 \times D_{\alpha r^2} \text{ とすると}$$

$$\psi_0 \begin{pmatrix} \zeta \\ z \end{pmatrix} = \left(\zeta + \frac{az}{2\zeta} + O(\zeta^{-3}) \right)$$

であり, τ_0 に近い形をしている。

証明 単に計算による。

4.5 補題 X を 2次元球面から 3つの開円板を除いたものとする, X の各境界成分をそれぞれ自身に写す位相同型写像のつくる空間は contractible である。

4.6 補題 B_1, B_2 を, 円周を base とし fiber を円板から 2つの円板を除いてできる面である fiber bundle とする。このとき, もし円周を一周したときの fiber の変換より生じる fiber の境界成分の変換が同じならば, B_1 と B_2 は fiber bundle として同型である。

4.7 補題 (4.4) が成り立つように十分大きな r について $\partial V_+(r)$ を考える。 γ_r を $\zeta = e^{2\pi it}, \zeta^2 z = \alpha r^2$ ($0 \leq t \leq 1$) によって表される曲線とすると, 位相同型写像 $g: V_+(r) \rightarrow T$ で $g(\gamma_r)$ が T -緯度曲線であるものが存在する。

4.8 命題 位相同型写像 $g: V_+(r) \rightarrow T$ で, $g(\gamma_r)$ が T -緯度曲線ならば次の図式

$$\begin{array}{ccc} V_+(r) & \xrightarrow{g} & T \\ \downarrow F & & \downarrow \tau \\ V_+(r^2) & \xrightarrow{g'} & T \end{array}$$

が可換となるような位相同型写像 $g': V_+(r^2) \rightarrow T$ が存在する。さらに $g'(\gamma_{r^2})$ は $\tau(T)$ -緯度曲線である。

証明 次の段階による。補題 (4.4) により $V_+(r^2) \setminus F(V_+(r))$ も $T \setminus \tau(T)$ も fiber を 3つの穴のあいた球面とする円周上の fiber bundle であり, 補題 (4.6) の条件を満たす。よって同型写像 $g_0: V_+(r^2) \setminus F(V_+(r)) \rightarrow T \setminus \tau(T)$ が存在する。さらに, $\partial(F(V_+(r)))$ 上では $\tau \circ g_0 \circ F^{-1}$ と一致するように g_0 を連続変形させることができる。

$g = g_0$ ($V_+(r^2) \setminus F(V_+(r))$ 上), $g = \tau \circ g_0 \circ F^{-1}$ ($F(V_+(r))$ 上) とすれば条件を満たす。

定理 4.1 の証明 帰納法による。同じ構成法で, $g^{(k)}: V_+(r^{2^k}) \rightarrow T$ なる写像を作り $G^{(k)}: F^{-k}(V_+(r^{2^k})) \rightarrow \tau^{-k}(T)$ を $G^{(k)} = \tau^{-k} \circ g^{(k)} \circ F^{(k)}$ で定義すると, 次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccccccc} V_+(r) & \xrightarrow{F} & V_+(r^2) & \xrightarrow{F} & V_+(r^4) & \xrightarrow{F} & \dots \\ \text{id} \downarrow & g \downarrow & F \downarrow & g' \downarrow & F^2 \downarrow & g'' \downarrow & \dots \\ V_+(r) & \xrightarrow{F^{-1}} & F^{-1}(V_+(r)) & \xrightarrow{F^{-1}} & F^{-2}(V_+(r)) & \xrightarrow{F^{-1}} & \dots \\ T & \xrightarrow{\tau} & T & \xrightarrow{\tau} & T & \xrightarrow{\tau} & \dots \\ G \downarrow & \text{id} \downarrow & G' \downarrow & \tau \downarrow & G'' \downarrow & \tau^2 \downarrow & \dots \\ T & \xrightarrow{\tau^{-1}} & \tau^{-1}(T) & \xrightarrow{\tau^{-1}} & \tau^{-2}(T) & \xrightarrow{\tau^{-1}} & \dots \end{array}$$

これにより $U_+(r) = \bigcup_{k=0}^{\infty} F^{-k}(V_+(r^{2^k}))$ から $\bigcup_{k=0}^{\infty} \tau^{-k}(T) = S^3 \setminus \Sigma_-$ への位相同型写像が作れる。

補題 (4.3) の証明は R が十分大きなとき写像 $h_+: V_+ \rightarrow \mathbf{R}_+ (= \{r \in \mathbf{R}; r > 0\})$ が開区間 $I_R := (R, \infty)$ 上の, solid torus を fiber とする trivial bundle であることを示しており, 同型写像 $U_+(r) \rightarrow S^3 \setminus \Sigma_-$ により, 写像 $h_+: U_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ が同じ R に対して I_R 上の trivial

bundle であることが分かる。 F^k は $h_+^{-1}(I_{2^{-k}}) \rightarrow h_+^{-1}(I_R)$ の fiber homeomorphism (base point s を $2^k s$ に写す) だから h_+ は R_+ の任意のコンパクト集合上で trivial bundle, R_+ は contractible だから h_+ は R_+ 上の trivial bundle を与える。

5 $U_+(r)$ の foliation

5.1 $h_+(x, y)$ は U_+ 上で多重調和なので $U_+(r)$ は Riemann 面による foliation をもつ。つまり関数 $\varphi_+(x, y)$ は fiber を $\varphi_+^{-1}(\zeta)$ とする $U_+(r)$ の foliation をあたえる。

5.2 定理 $U_+(r)$ の自然な foliation の全ての leaf は C と同型でそれぞれは $U_+(r)$ 中稠密である。

証明 補題 (4.3) が適用できるような十分大きな r に対して, $|\zeta| = r$ なる $\zeta \in C \setminus \bar{D}$ を選ぶ。 $\varphi^{-1}(\zeta)$ の任意の点を通る leaf は

$$\varphi^{-1}(\zeta) \cup F^{-1}(\varphi^{-1}(\zeta^2)) \cup \dots \cup F^{-k}(\varphi^{-1}(\zeta^{2^k})) \cup \dots$$

と表される。補題 (4.3) によりこれは連結かつ単連結な面の増大列の極限なので連結かつ単連結である。各 leaf が $U_+(r)$ で稠密なことは

$$F^{-k}(\varphi_+^{-1}(\zeta^{2^k})) = \bigcup_{m=0}^{2^k-1} \varphi_+^{-1}(\zeta e^{2^{-k}2\pi im})$$

であることと $\bigcup_{k=0}^{\infty} \{e^{2^{-k}2\pi im}; 0 \leq k \leq 2^k - 1\}$ が単位円周 $\{|\zeta| = 1\}$ 上で稠密なことより分かる。各 leaf が C と同型なことの証明がまだ残っているが, それは次の3つの命題による。詳しい証明は省略する。

5.3 命題 X を単連結 Riemann 面, $K \subset X$ を一点ではない連結かつ単連結な部分集合とする。もし A_0, A_1, A_2, \dots が $X \setminus K$ に disjoint に埋め込まれた円環で,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \text{mod}(A_i) = \infty$$

ならば面 X は C と同型である。ただし $A \approx \{z; 1 < |z| < r\}$ のとき $\text{mod}(A) = \log r$ 。

5.4 命題 (Grötzsch) A_1, A_2, \dots を開円環の列とする。もし $\varphi_j: A_j \rightarrow A$ がホモトピー同値であり, 像が disjoint な等角写像とすると, $\sum_j \text{mod}(A_j) \leq \text{mod} A$

5.5 補題 写像 $(x, y) \rightarrow \frac{y}{x^2}$ は, $A_\zeta := \varphi_+^{-1}(\zeta) \setminus W_+$ を C 上の領域 $\{\frac{1}{4r^2} \sqrt{\frac{3r+6|c|}{5}} < |z| < \alpha\}$ を含む領域に 1:1 に写像する。

5.6 命題 φ は多価関数なので写像 $(x, y) \rightarrow \frac{\varphi(x, y)}{|\varphi(x, y)|}$ は leaf の集合から群 $R/Z[1/2]$ への全単射を誘導する。

5.7 注意 F を F^{-1} に変えても同様な結果を得る。 F^{-1} もまたエノン写像（と共役）であり

$$F^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{y^2 + c - x}{a} \end{pmatrix}$$

なので, $\alpha' := \frac{|a^2|}{6}, \beta' := |a| \sup \left\{ \sqrt{\left| \frac{2c}{a} \right|}, 4\sqrt[3]{|a|^{-1}}, \frac{6}{|a|}, 4 \right\}$ として,

$V_- := \{(x, y) \in C; |x| < \alpha'|y|^2, |y| > \beta'\}, W_- := \{(x, y) \in C; |y| < \beta' + 1, |x| < \beta'\}$ とすればよい。 $\varphi_-(x, y), h_-(x, y)$ などとも同様に定義する。

5.8 U_+ の解析的な構造

\tilde{U}_+ を φ_+ の Riemann 面と U_+ との共通部分すると, $\varphi_+(x, y)$ は 0 をとらないので \tilde{U}_+ は複素多様体 U_+ の不分岐被覆空間であり, \tilde{U}_+ は 2 次元複素多様体である。集合 V_+ は自然に, 開集合として \tilde{U}_+ に埋め込まれている。 φ_+ の V_+ 上での自然な定義から出発して \tilde{U}_+ に拡張してできる解析関数を $\tilde{\varphi}_+ : \tilde{U}_+ \rightarrow C \setminus \bar{D}$ とする。 $U_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{-n}(V_+)$ だから定理

(5.2) より,

5.9 定理 $\tilde{\varphi}_+$ の fiber は C と同型である。

5.10 予想 射影 $\varphi_+ : U_+ \rightarrow C \setminus \bar{D}$ は自明な解析的 fiber bundle である。

注意 [23] にはこれを定理としている。その証明を理解できなかったが, この命題そのものは正しいと思われる。また, \tilde{U}_+ を φ_+ の Riemann 面としているが, 自明ではないと思われる。

6 K_+ の canonical なコンパクト化

6.1 K_+ の canonical なコンパクト化

$\bar{K}_+ := K_+ \cup \Sigma$ に次のような位相を入れる: K_+ は \bar{K}_+ の開集合で, 点

$$\zeta = (\dots, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_0) \in \Sigma$$

の ε -近傍を

$$\left\{ (x, y) \in K; F^k(x, y) \in V_-, \left| \frac{\varphi_-(F^k(x, y))}{|\varphi_-(F^k(x, y))|} - \zeta_k \right| \leq \varepsilon \left(k \leq \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\}$$

と Σ での ζ の ε -近傍との和集合とする。

5.2 命題 空間 a) \bar{K} はコンパクトかつ Hausdorff

b) \bar{K} は K の閉包である。

c) K 上では $\bar{F} = F, \Sigma$ 上では $\bar{F} = \sigma^{-1}$ とすると, 写像 $\bar{F} : \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ は連続である。

証明 a) Σ は明らかにコンパクトだから, K の任意の点列が集積点をもつことを証明すれば十分である。 (x_n, y_n) を K の任意の点列とし, $\|(x_n, y_n)\| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) とする。 $\|(x, y)\|$ が十分大なるとき $(x, y) \in V_+ \cup V_-$ だから, $\varepsilon > 0$ に対して, n が十分大きければ,

$k < \frac{1}{\varepsilon}$ のとき $F^k(x_n, y_n) \in V_-$ 。円周のコンパクト性と対角線論法により, (x_n, y_n) の部分列を $\frac{\varphi_-(F^k(x_n, y_n))}{|\varphi_-(F^k(x_n, y_n))|}$ ($n = 1, 2, \dots$) が任意の k に対して, 例えば ζ_k に収束するようにとれる。このとき $\zeta_k^2 = \zeta_{k-1}$ である。 $\zeta = (\dots, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_0)$ とすると, この部分列 $\{(x_n, y_n)\}$ は ζ に収束する。次に $\zeta = (\dots, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_0)$, $\zeta' = (\dots, \zeta'_2, \zeta'_1, \zeta'_0)$ を Σ の異なる 2 点とする。 $\zeta_i = \zeta'_i$ ($i < k$), $\zeta_k \neq \zeta'_k$ のとき $\varepsilon = \frac{|\zeta_k - \zeta'_k|}{2}$ とすると ζ, ζ' の ε -近傍は disjoint である。 b) は K_+, φ_-, F を全て K_-, φ_+, F^{-1} に変えて考えると明らかである。 c) は定義より明らか。

6.3 注意 原文には b) The subset $\Sigma \subset \bar{K}_+$ is the closure of K_+ となっており, b) の証明に 2/3 ページを費やしているが, 全く理解できなかった。訂正の仕方がまた間違っているかもしれない。

参考文献 原論分の参考文献を原則として全て挙げる。従って本稿に無関係なものも含まれる。

- [1] Alekseev, V., Quasirandom dynamical systems I, Math. USSR Sbornik, 5(1968),73-128; II,6 (1968), III 505-560; 7 (1969), 1-43.
- [2] Bendicks, M. & Carleson, L., The dynamics of the Hénon map, (to appear)
- [3] Bieberbach, L., Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlicht volumetreue Abbildung des \mathbf{R}_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-math. Kl., (1933), 476-479.
- [4] Blanchard, P., Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. (New Ser.) AMS, 11(1984), 85-141.
- [5] Bochner, S. & Martin, W., Several Complex Variables. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1948.
- [6] Devaney, R., An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Benjamin-Cummings, Menlo Park, Calif., 1986.
- [7] Devaney, R., & Nitecki, Z., Shift automorphisms in the Hénon Mapping, Comm. math. Phys., 67 (1979), 137-148.
- [8] Douady, A. & Hubbard, J., On the dynamics of polynomial-like mappings, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e ser., 18(1985), 287-343.
- [9] , Etude dynamique des polynômes complexes, Publ. math. d'Orsay, Univ. de Paris-Sud (1984-85).
- [10] Earle, C. & Eells, J., A fibre bundle description of Teichmüller theory, J. Diff. Geom., 3(1969), 33-41.
- [11] Fatou, P., Sur les fonctions méromorphes de deux variables, C.R. Acad. Sc. Paris, 175(1922), 862-865; Sur certaines fonctions uniformes de deux variables, 175(1922), 1030-1033.
- [12] Friedland, S., On the uniqueness of the Hénon form. (to appear).
- [13] Friedland, S., & Milnor, J., Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, (to appear)

- [14] Hamstrom, M., Homotopy groups of the space of homeomorphisms, III. *J. Math.*, 10(1966), 563-573.
- [15] Hedlund, G., Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system, *Math. Sys. Theory*, 3(1969), 320-375.
- [16] Hénon, M., Numerical study of quadratic area preserving mappings, *Q. Appl. Math.* 27(1976), 291-312.
- [17] , A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Commun. Math. Phys.*, 50(1976), 69-77.
- [18] Hitotumatu, S., Some recent results in several complex variables by the Japanese school, in *Proc. Romanian-Finnish Sem. on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings*, Brasov, Romania, 1969. Bucharest, Romania, 1971, 187-191.
- [19] Holmes, P., Bifurcation sequences in horseshoe maps: Infinitely many routes to chaos, *Phys. Lett. A*, 104(1984) 299-302.
- [20] Holmes, P., Whitley, R., Bifurcation of one- and two-dimensional maps, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 311(1984) 43-102.
- [21] Holmes, P., Williams, R., Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: torus knots and bifurcation sequences, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 90(1985), 115-194.
- [22] Hubbard, J., The Hénon mappings in the complex domain, in *Chaotic Dynamics and Fractals* (M. Barnsley & S. Demko, ed.) Academic Press, New York, 1986, 101-111.
- [23] Hubbard, J. & Oberste-Vorth, R., The Hénon mappings in the complex domains I, General results, (preprint)
- [24] , The Hénon mappings in the complex domain II: complex horseshoes. III: projective and inductive limits of polynomials.
- [25] Milnor, J., Remark on Hénon horseshoes (unpublished note)
- [26] , Non-expansive Hénon maps, *Adv. in Math.* 69(1988), 109-114.
- [27] Moser, J., *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1973.
- [28] Newhouse, S., Lectures on dynamical systems, in *Dynamical Systems, C.I.M.E. lectures*, Bressanone, Italy, June, 1978. Birkhäuser-Boston, 1980, 1-114.
- [29] Poincaré, H., Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles, 1^{ère} Thèse, (1879) in *Oeuvres Vol. 1*. Gautier-Villars, Paris, 1928.
- [30] Rofsen, D., *Knots and Links*. Publish or Perish, Berkeley Calif., 1976.
- [31] Smale, S., Diffeomorphisms with many periodic points, in *Differential and Combinatorial Topology*. (S. Cairns, ed.), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1973.
- [32] Smillie, J., A note on connectivity (unpublished note).
- [33] van Dantzig, D., Ueber topologisch homogene Kontinua, *Fund. Math.*, 14(1930), 102-105.
- [34] Vietoris, L., Ueber den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, *Math. Ann.*, 97(1927), 454-472.
- [35] Williams, R., One-dimensional nonwandering sets, *Topology*, 6 (1967), 473-487.