

1. Introduction

擬等角変形の理論は一変数力学系の理論、すなわちクライン群や有理関数の iteration の研究の有用な手段である。しかし、擬等角変形を施して得られる力学系をもとの力学系から予想するのは難しい。このことに関して、擬等角変形の代数的効果の評価という問題が考えられる。つまり有理関数の係数やクライン群の生成元はどれだけ変化するだろうか。

この論文では、擬フックス群の商リーマン面上の細い部分における擬等角変形がどれだけの代数的変化をもたらすかを評価する。この評価から、cusps がタイヒミュラー空間の境界で稠密であるというベアスの予想 ([Bers 3]) が肯定的に証明される。

この論文の結果を述べるために、いくつかの事柄を思い出しておく。X を有限型リーマン面とする。X を上半平面 H のフックス群 Γ_X による商 H/Γ_X として表現する。 Γ_X は下半平面 L にも作用し、 L/Γ_X は X の複素共役 \bar{X} である。

$h: X \rightarrow Y$ を擬等角写像とすると (h, Y) はタイヒミュラー空間 $\text{Teich}(X)$ の点を定める。 h の complex dilatation は Γ_X にかんする H 上の $(-1, 1)$ 形式 μ に持ち上げられる。 μ を H 以外では 0 として \hat{C} に拡張する。 $f: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ を μ をベルトラミ係数とする擬等角写像で $z = -i$ の近傍で

$$f(z+i) = \frac{1}{z+i} + O(|z+i|)$$

なる挙動をするものとする。 $\Gamma_Y = f\Gamma_X f^{-1}$ はリーマン面 Y と \bar{X} を表現する擬フックス群である。このようにして

$$\iota: \text{Teich}(X) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma_X, \text{PSL}_2 \mathbb{C}) / \text{conjugation}$$

なる埋め込みが得られる。その像の閉包は、擬フックス群の代数的極限であるクライン群による $\text{Teich}(X)$ のコンパクト化を与える。写像 f は下半平面 L 上で等角であり、そのシュワルツ微分 Sf はリーマン面 \bar{X} 上の二次微分 ϕ_Y を定義する。リーマン面 \bar{X} 上の正則二次微分で

$$\|\phi\| = \sup_{\bar{X}} \rho^{-2} |\phi| < \infty$$

を満たすものの空間を $P(\bar{X})$ と書くことにすると、対応 $f \rightarrow \phi_Y$ は

$$\beta: \text{Teich}(X) \rightarrow P(\bar{X})$$

なる埋め込みをあたえる。ただし、 $\rho(z)|dz|$ は \bar{X} 上のポアンカレ計量である。

Nehari [Neh] の結果から、タイヒミュラー空間は (上のように定義した $P(\bar{X})$ のノルムに関して) 半径 $3/2$ の球に含まれる。

$P(\bar{X})$ に含まれる二次微分 ψ は下半平面 L 上の Γ_X 不変二次微分 ϕ に持ち上げられる。 ϕ をシュワルツ微分とする L 上の局所単葉有理型関数 f_ϕ で $z = -i$ において

$$f_\phi(z+i) = \frac{1}{z+i} + O(|z+i|)$$

なる展開をもつものが存在する。この関数 f_ϕ は Γ_X と $\text{PSL}_2\mathbb{C}$ の部分群との間の conjugation をあたえる。このようにして写像

$$\eta: P(\bar{X}) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma_X, \text{PSL}_2\mathbb{C}) / \text{conjugation}$$

が得られる。写像 ι, β, η の間には $\eta \circ \beta = \iota$ なる関係がある。 η は $\beta(\text{Teich}(X))$ の閉包において単射であり、タイヒミュラー空間の $P(\bar{X})$ におけるコンパクト化と群によるコンパクト化とは同相である。以下、群によるコンパクト化を扱うが $P(\bar{X})$ におけるノルムをタイヒミュラー空間のコンパクト化の距離として使うことにする。

定義. $\rho: \Gamma_X \rightarrow \Gamma \subset \text{PSL}_2\mathbb{C}$ を上の埋め込みに関する境界点であるとする。ある双曲的元 $\gamma \in \Gamma_X$ に対して $\rho(\gamma)$ が放物的であるとき ρ は cusp であるという。この場合 γ は X の単純閉曲線に対応する。 X 上の一点又は puncture にホモトピックでない互いに交わらない単純閉曲線の極大な系が存在して、それらの曲線に対応する全ての $\gamma \in \Gamma_X$ に対して $\rho(\gamma)$ が放物的であるとき ρ は maximal cusp であるという。また、境界点 $\rho: \Gamma_X \rightarrow \Gamma \subset \text{PSL}_2\mathbb{C}$ に対して Γ の不連続領域が連結であるとき Γ は総退化群 (totally degenerate group) であるという。Bers は全ての境界点が cusp 又は totally degenerate group であることを証明した。

この論文では次の定理を証明する。

定理 1.1 *Maximal cusps* 全体の集合はタイヒミュラー空間の境界で稠密である。

証明はリーマン面 Y 上の細い部分に台を持つベルトラミ微分による擬等角変形が及ぼす変化を表現 ρ において評価することによって得られる。ここでもちいる擬等角変形と代数的変化を結び付けるテクニックは一般の双曲的 3 次元多様体に適用することができる。また、有理関数の iteration など他の力学系に応用することもできる。

さて、タイヒミュラー空間は $P(\bar{X})$ の部分空間と見なされるが、 $P(\bar{X})$ はベクトル空間であるからその接空間と $P(\bar{X})$ 自身とは自然に同一視され、 $P(\bar{X})$ のベクトルもまた $P(\bar{X})$ のノルムによって計られる。Teich(X) の点 $p = [h, Y]$ に対して、リーマン面 Y 上の有界可測ベルトラミ微分 $\mu(z)dz/dz$ の空間を $M(Y)$ とおく。 $M(Y)$ には $\|\mu\| = \sup_Y |\mu|$ によりノルムが定義される。各 $\mu \in M(Y)$ は Y の無限小変形を定義する。したがって μ により p における Teich(X) の接ベクトルが定義される。 cusp が稠密であるという事実は次の定理から従う。

定理 1.2 リーマン面 Y 上のノルム 1 のベルトラミ微分 μ の台が、単射半径 $L < 1/2$ の部分集合に含まれるとする。このときベアス埋め込みの微分による μ の像の長さは高々 $C(L \log 1/L)^2$ である。ただし、 C は X にのみ依存する定数である。

注意. C は実際に、基点となるリーマン面 X に依存する。 X 上の最も短い閉測地線の長さを $\text{short}(X)$ と置くとき、証明から $C = O(1 + 1/\text{short}(X))$ であることが分かる。

系 1.3 $p = [h, Y]$ を、固定されたタイヒミュラー空間 Teich(X) の点とする。長さが $L (< 1/2)$ 未満の互いに交わらない単純測地線の集合がリーマン面 Y 上に存在するとき、これらの曲線と放物的変換が対応するような cusp が点 p から $C(L \log 1/L)^2$ 以内の距離に存在する。

証明 上のような単純測地線に対し、それを含む単射半径 $2L$ 以下の部分集合に台を持つベルトラミ微分を用いた変形により長さを $L/2$ に縮めることができる。正確に言うと次のようになる。

上半平面 H に作用するフックス群 F で $H/F = Y$ なるものをとる。 Y 上の単純測地線 a の長さが L であるとする。 a に対応する F の元が $\gamma(\xi) = \lambda \xi (\lambda > 1)$ なる形をしているとしてよい。 a のまわりの collar で幅 $2b$, $\sin b = (2 \sinh L/2)^{-1}$ のものがとれる。これを A とおく。標準的射影 $\pi: H \rightarrow Y$ による A の逆像の成分のうち、半直線 $\{yi; y > 0\}$ を含むものを B とおくと B は $\{z \in H; -\theta_0 < \arg z < \theta_0\}$ なる形をしている。

上半平面 H 上の等角写像 $\zeta(\xi) = \frac{1}{L} \log \xi - \frac{\pi i}{2L}$ により H は領域 $\{|\text{Im } \zeta| < \pi/(2L)\}$

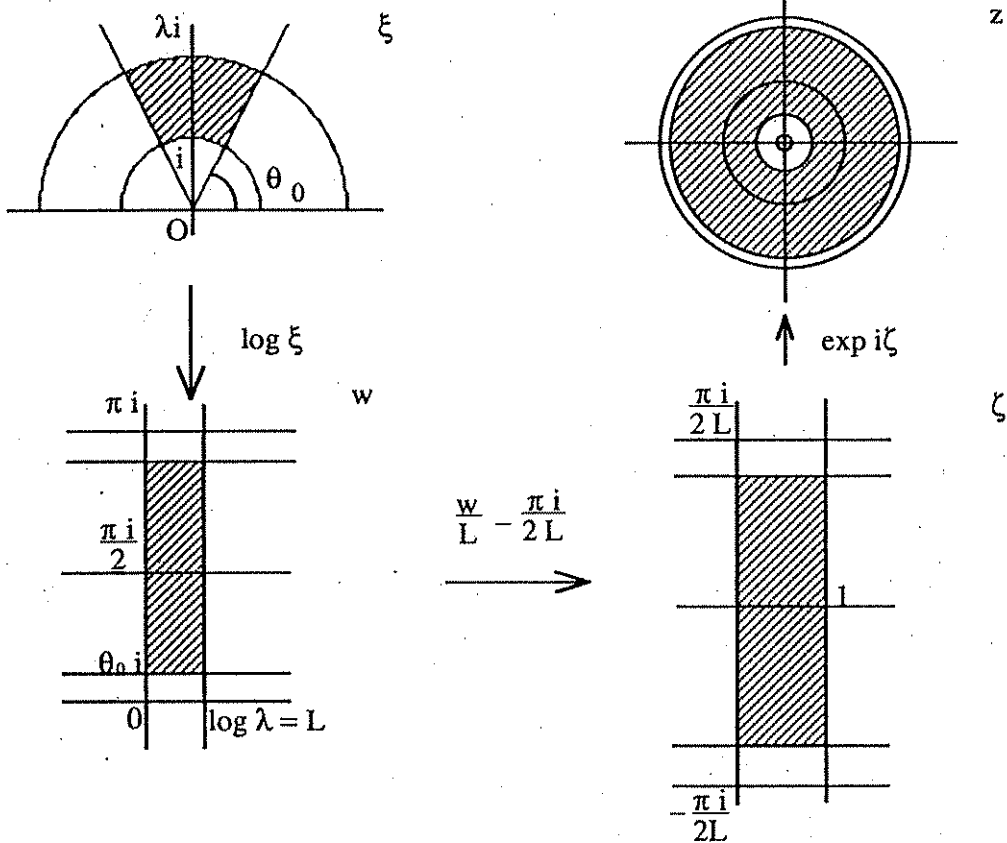
にうつされる。この領域における双曲的計量は $\frac{L |\mathrm{d}\zeta|}{\cos(L \mathrm{Im} \zeta)}$ である。

一方 $\alpha = \frac{\pi}{\pi - 2\theta_0}$ とおくと、領域 $(|\mathrm{Im} \zeta| < \pi/(2\alpha L))$ は標準的射影 π により環状

領域 A にうつされ、その双曲的計量は $\frac{\alpha L |\mathrm{d}\zeta|}{\cos(\alpha L \mathrm{Im} \zeta)}$ である。 L が 0 に近づくと θ_0

は 0 にちかづくから α は 1 に近づく。従って L が十分小さいとき、 Y における a の近傍において Y の双曲的計量と A の双曲的計量は "ほぼ同じ" と見なせることに注意する。 A にふくまれる a の環状近傍 A' (後で定める) をのぼすことにより a の長さを縮めたい。リーマン面 Y 上で擬等角写像や双曲的距離の変化を議論することは困難なので、上のことに注意しながら A 上で議論を進める。

ξ 平面の領域 $(|\mathrm{Im} \zeta| < \pi/(4\alpha L))$ は標準的射影 π により A の部分円環 A' に



うつされる。 $|\mathrm{Im} \zeta| < \pi/(4\alpha L)$ ならば $\cos(\alpha L \mathrm{Im} \zeta) < \sqrt{2} \alpha L$ である。 L が十分小さく $\alpha < \sqrt{2}$ であるとしてよい。このとき、 $\sqrt{2} \alpha L < 2L$ だから A' の A における (従って Y における) 単射半径は L をこえない。この A' に台を持つ Y のベルトラミ微分 μ を

$$\mu = \begin{cases} \frac{z}{z} & z \in A' \\ 0 & z \in Y - A' \end{cases}$$

と定義する。ただし、 z は $A = \{ e^{-\frac{\pi}{4t}} < |z| < e^{\frac{\pi}{4t}} \}$ なる局所変数である。 μ は定理 1.2 の仮定を満たしている。 $0 < t < 1$ に対して $t\mu$ をベルトラミ係数とする Y 上の写像を f_t とかくことにする。

$$f_t : A' : \{ e^{-\frac{\pi}{4t}} < |z| < e^{\frac{\pi}{4t}} \} \rightarrow \{ e^{-\frac{\pi}{4(1-t)}} < |z| < e^{\frac{\pi}{4(1-t)}} \}$$

$$f_t |_{A'}(z) = z |z|^{\frac{1-t}{t}}$$

p を始点とする $\text{Teich}(X)$ の弧

$$\{ \gamma(t) = [(f_t \circ h, f_t(Y))], \quad 0 \leq t \leq 1/2 \}$$

は $\gamma(0)$ において接ベクトル μ を定める。もっと一般に $0 < s < 1/2$ における接ベクトルを求めよう。 $f_s(Y)$ 上の擬等角写像 $f_t \circ f_s^{-1}$ のベルトラミ微分は

$$\frac{t-s}{1-st} \mu = \begin{cases} \frac{t-s}{1-st} \frac{z}{z} & z \in f_s^{-1}(A') \\ 0 & z \in f_s^{-1}(Y - A') \end{cases}$$

とかける。(ただし z は $f_s(A')$ を円環表示する局所変数である。) このことと、

$$\frac{d}{dt} \frac{t-s}{1-st} \Big|_{t=s} = \frac{1}{1-s^2}$$

であることから、 $\gamma(s)$ において定められる接ベクトルは

$$\frac{1}{1-s^2} \mu_s$$

である。これら μ_s の台は $f_s(A')$ に含まれる。 $f_s(A')$ の $f_s(A)$ における単射半径を、 A における A' の単射半径を求めたのと同様の方法でもとめると L をこえないことが解る。従って各 μ_s は定理 1.2 の仮定を満たす。よって、

$$\begin{aligned} \|\beta(p) - \beta(\gamma(1/2))\| &= \int_0^{1/2} |(\beta(\gamma(t)))'| dt \\ &\leq C(L \log \frac{1}{L})^2 \int_0^1 \frac{ds}{1-s^2} \\ &\leq C'(L \log \frac{1}{L})^2 \end{aligned}$$

さて、 $f_{1/2}(A')$ のモジュラスは A' のモジュラスの3倍であるから、 $f_{1/2}(A)$ のモジュラスは $f_{1/2}(A')$ のモジュラスの2倍である。したがって $f_{1/2}(A)$ における $f_{1/2}(a)$ の双曲的ながさは A における a の長さの $1/2$ すなわち $\alpha L/2$ である。よって $f_{1/2}(a)$ の $f_{1/2}(Y)$ における双曲的長さは $\alpha L/2$ をこえない。

同様の議論を n かい繰り返して得られる点は $\beta(p)$ から

$$C' \sum_1^n \left(\left(\frac{\alpha}{2} \right)^v L \log \frac{1}{(\alpha/2)^v L} \right)^2$$

の距離にあつて、このとき曲線 a のながさは $(\alpha/2)^n L$ まで縮められる。ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば $\text{Teich}(X)$ におけるこのような点列は a が放物的変換に対応するような cusp に集積する。また

$$\sum_1^\infty \left(\left(\frac{\alpha}{2} \right)^v L \log \frac{1}{(\alpha/2)^v L} \right)^2 = O(L \log \frac{1}{L})^2$$

であるから、系の主張は証明された。

cusp の集合が境界で稠密であることを示すために、ベアスのコンパクト化の位相的性質について述べる。

命題 1.2 $\text{Teich}(X)$ のベアス埋め込み β による像 $\beta(\text{Teich}(X))$ の $P(\bar{X})$ における閉包の内点集合は $\beta(\text{Teich}(X))$ である。

証明 この命題は[Shiga]において証明されている。improved λ -lemma を用いても証明できる。

系1.5 タイヒミュラー空間の境界は 総退化群からなる稠密な G_δ 集合を含む。

証明 フックス群 Γ_X の双曲的変換 γ に対して $G_\gamma = \{\phi \in \beta(\text{Teich}(X)); (\text{trace } \eta(\phi)(\gamma))^2 = 4\}$ とおく。 G_γ は 解析的部分集合だから、上の命題により $\partial\beta(\text{Teich}(X)) - G_\gamma$ は $\partial\beta(\text{Teich}(X))$ で稠密な開集合である。よって cusp でない総退化群全体の集合 $\partial\beta(\text{Teich}(X)) - \cup_\gamma G_\gamma = \cap_\gamma (\partial\beta(\text{Teich}(X)) - G_\gamma)$ は、 $\partial\beta(\text{Teich}(X))$ で稠密な G_δ 集合である。

定理1.1の証明 x をタイヒミュラー空間の境界点とする。先の結果から、 x が総退化群と対応するときに x に集積する maximal cusp の点列が存在することを言えばよい。 $\{y_n\}$ をタイヒミュラー空間の点列で x に集積するものとする。リーマン面 X の型にのみ依存する定数 M があって、各 y_n 上の互いに交わらない単純閉曲線の極大集合 S_n をその長さが M 以下であるように選ぶことができる。

与えられた L に対して、 n に依存しない正数 K_L があって、各 y_n を K_L 擬等角写像を用いて変形し S_n の長さを L に縮めることができる。このようにして得られる点列を $\{z_n^L\}$ とおく。 x が総退化群に対応するから、 $\{z_n^L\}$ もまた x に収束する。一方、各 z_n^L は maximal cusp から $C(\text{Log}1/L)^2$ の距離にある。任意の正数 ε に対して、 $C(\text{Log}1/L)^2 < \varepsilon/2$ なるよう L を小さくとる。このような L に対して n を十分大きくとれば $|z_n^L - x| < \varepsilon/2$ したがって x の ε 近傍に maximal cusp が存在する。

系1.7 タイヒミュラー空間の任意の点に対し、モジュラー群によるその点の軌道の集積点集合はタイヒミュラー空間の境界で稠密である。

証明 x をタイヒミュラー空間の一点とする。 x に対応するリーマン面上の互いに交わらない単純閉曲線の任意の極大集合 S に対し、 S の各元のまわりの Dehn twist の合成から得られるモジュラー変換を τ とおく。すると点列 $\{\tau^n(x)\}$ は S の

各元と楕円的一次変換が対応するような maximal cusp に収束する ([Hej]). x の軌道の集積点集合は maximal cusps 全体の集合をふくむから タイヒミュラー空間の境界で稠密となる。

2 Quasiconformal distortion of projective structure.

2.1 The derivative of Bers' embedding

Teich(X) の点 $[(h, Y)]$ に対し、 Y 上のベルトラミ微分 μ は $[(h, Y)]$ における接ベクトルを定める。そのベクトルの、ベアス埋め込み β の微分による像のノルム $\|d\beta(\mu)\|$ を幾何学的に表現しよう。

擬フックス群 Γ_Y の limit set $\Lambda = \Lambda(\Gamma_Y)$ は \hat{C} を二つの円板 $\Omega = \Omega(\bar{X})$ と $\Omega' = \Omega(Y)$ に分ける ($\Omega/\Gamma_Y = \bar{X}$, $\Omega'/\Gamma_Y = Y$)。 μ は $\Omega(Y)$ 上の Γ_Y に関する $(-1, 1)$ 形式に持ち上げられる。それも同じ記号 μ で表すことにする。ここで次の記号を導入する。

記号 ; ふたつの量 $f(x)$ と $g(x)$ が、変数 x によらない定数 c, C に対して $cf(x) < g(x) < Cf(x)$ であるとき $f \sim g$ とかくことにする。

$$\text{定理 2.2} \quad \|d\beta(\mu)\| \sim \sup_{p \in \Omega} \left\{ \frac{1}{(\text{diam } T_p(\Lambda))^2} \left| \int_{T_p(\Omega')} T_p^* \mu(\zeta) d\bar{\zeta} d\zeta \right| \right\}$$

ただし T_p は p を ∞ に写す一次変換である。(上式は T_p の選び方によらないことに注意する。)

証明 \hat{C} の擬等角自己同型 f を $f(H) = \Omega'$, $f\Gamma_X f^{-1} = \Gamma_Y$ で 下半平面 L 上で等角写像であるものとする。すなわち

$$\beta([(h, Y)]) = S(f|L)。$$

ベルトラミ微分 $t\mu$ ($0 < t < 1$) はタイヒミュラー空間上の弧 Y_t を定める。ベルトラミ係数 $t\mu$ を持つ \hat{C} の擬等角自己同型を g_t とおく。このとき

$$\begin{aligned} d\beta(\mu) &= \frac{d\beta(Y_t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} S(g_t(f)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \{ S(g_t) \cdot f \cdot f^2 + S(f) \} \Big|_{t=0} \\ &= \phi \cdot f \cdot f^2 \end{aligned}$$

ただし、

$$\phi = -\frac{6}{\pi} \int_{\hat{c}} \frac{\mu(z) dz \bar{dz}}{(z-w)^4}$$

ここで

$$\begin{aligned} \sup_{z \in L} |(\operatorname{Im} z)^2 d\beta(\mu)(z)| &= \sup_{z \in L} |\phi \cdot f(z)| \times |f'(z)|^2 (\operatorname{Im} z)^2 \\ &= \sup_{w \in \Omega} |\lambda_{\Omega}(w)^{-2} \phi(w)| \end{aligned}$$

一次変換 T に対し、 $T(z) = \zeta$, $T(w) = \eta$ とおくと

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_{\Omega}(w)^{-2} \int_{\hat{c}} \frac{\mu(z) dz \bar{dz}}{(z-w)^4} \right| \\ &= \left| \lambda_{\Omega}(w)^{-2} \int_{\Omega} \frac{\mu(z) T'(z)^2 \overline{T'(w)}^2}{(T(z) - T(w))^4} dz \bar{dz} \right| \\ &= \left| \lambda_{T\Omega}(w)^{-2} \int_{\mathfrak{m}} \frac{\mu(T^{-1}(\eta)) T'(z) \overline{T'(z)}}{(\zeta - \eta)^4} d\zeta \bar{d\zeta} \right| \end{aligned}$$

Ω の点 p に対し $T(p) = \infty$ なる一次変換について考える。 $R = \operatorname{diam} T(\partial\Omega)$ とおくととき $\eta = \infty$ の近傍で

$$1 \leq \frac{\lambda_{T\Omega}(\eta)^2}{R^2} \leq 48 \frac{1}{(|\eta|^2 - R^2)^2}$$

が成立することが容易に確かめられる。従って p の近傍で

$$\left| \lambda_{\Omega}(w)^{-2} \int_{\hat{c}} \frac{\mu(z) dz \bar{dz}}{(z-w)^4} \right| \geq \frac{1}{48R^2} \left| \int_{\mathfrak{m}} T^*(\mu) d\zeta \bar{d\zeta} \right|$$

この式で $w \rightarrow p$ ($\eta \rightarrow \infty$) とすれば

$$\left| \lambda_{\Omega}(p)^{-2} \int_{\mathfrak{m}} \frac{\mu(z)}{(z-p)^4} dz \bar{dz} \right| \geq \frac{1}{48 R^2} \left| \int_{\mathfrak{m}} T^*(\mu) d\zeta \bar{d\zeta} \right|$$

同様にして

$$\left| \lambda_{\Omega}(p)^{-2} \int_{\mathfrak{m}} \frac{\mu(z)}{(z-p)^4} dz \bar{dz} \right| \leq \frac{1}{R^2} \left| \int_{\mathfrak{m}} T^*(\mu) d\zeta \bar{d\zeta} \right|$$

従って定理の主張が示された。

系 2.3 $\|d\beta(\mu)\| = O(1)$.

定義 任意のリーマン面 X に対して、 $Q(X)$ を X 上可積分な正則二次微分全体のなす空間とする。 $Q(X)$ はノルム $\|\phi\| = \operatorname{Re} \int_X |\phi|$ に関するバナッハ空間である。

$M(X)$ のベルトラミ微分と $Q(X)$ の二次微分の間には

$$\langle \phi, \mu \rangle = \operatorname{Re} \int_X \phi \mu$$

で定義される自然なペアリングが存在する。

このことから、 $Q(X)$ を $\operatorname{Teich}(X)$ の基点における余接空間と同一視することができ、 $Q^*(X) = M(X)/Q(X)^\perp$ を接空間と同一視することができる。

与えられた被覆写像 $p: Y \rightarrow X$ に対して、 $Q(Y)$ の元 ϕ に $Q(X)$ の元 $p^*(\phi)$ を対応させる写像を $\Theta_{Y/X}$ とかくことにする。

簡単のため、擬フックス群 Γ_Y の不連続領域の Y を被う成分 Ω' に対して $\Theta = \Theta_{\Omega'/Y}$ とおく。定理 2.2 は Θ を用いて次のようにかき直される。

定理 2.4 Y 上のベルトラミ微分 μ の台が Y の部分集合 Y' に含まれるとする。このとき、

$$\|d\beta(\mu)\| \leq O \left(\sup_{p \in \Omega} \frac{1}{(\text{diam } T_p(\Lambda))^2} \int_{Y'} |\Theta(dz_p^2)| \right)$$

ただし、 $z_p = T_p(z)$ 。

証明 定理 2.2 より、 $\zeta = T_p(z)$ とおくと

$$\begin{aligned} \|d\beta(\mu)\| &\sim \sup_{p \in \Omega} \left\{ \frac{1}{(\text{diam } T_p(\Lambda))^2} \left| \int_{T_p(\Omega')} T_p^* \mu(\zeta) d\zeta d\bar{\zeta} \right| \right\} \\ &= \sup_{p \in \Omega} \frac{1}{(\text{diam } T_p(\Lambda))^2} \left\langle (d\zeta)^2, T_p^* \mu \right\rangle \\ &= \sup_{p \in \Omega} \frac{1}{(\text{diam } T_p(\Lambda))^2} \left| \langle p^*(d\zeta)^2, \mu \rangle \right| \\ &= \sup_{p \in \Omega} \frac{1}{(\text{diam } T_p(\Lambda))^2} \left| \int_{Y'} \mu \Theta(d\zeta^2) \right| \\ &\leq \sup_{p \in \Omega} \frac{1}{(\text{diam } T_p(\Lambda))^2} \left| \int_{Y'} \Theta(d\zeta^2) \right| \end{aligned}$$

2.2 Cuspidal deformations are negligible.

この節ではリーマン面 Y の puncture の近傍に台を持つベルトラミ微分 μ の $d\beta$ による像のノルム $\|d\beta(\mu)\|$ を評価する。

定義 Y の点 p でそれを通る長さ L 未満の閉測地線が存在するようなもの全体からなる集合を $Y(L)$ とかき Y の L -thin part と呼ぶ。ある正数 L_0 が存在して、 $L < L_0$ ならば $Y(L)$ の各成分は Y の puncture を境界成分とする二重連結領域か又は短い測地線のまわりの二重連結領域となる。前者のような成分の和を cuspidal thin part と呼び $Y(L, \text{cusp})$ とかく。

命題 2.5 Y をリーマン面、 φ を $Q(Y)$ の元とする。このとき、

$$\int_{Y(L, \text{cusp})} |\phi| \leq O(\exp(-\frac{1}{L})) \int_Y |\phi|$$

証明 $L < L_0$ とする。E を $Y(L_0)$ の cuspidal component, D を E の L-thin part に含まれる部分集合とする。E = { w ; $0 < |w| < 1$ } なる局所座標を導入する。このとき、D は E の部分集合 { w ; $0 < |w| < R$ }, $R = O(\exp(-1/L))$ の中に含まれる。

ϕ は可積分なので、 $w = 0$ において高々一位の極しか持たない。正則関数 ψ を用いて $\phi(w) dw^2 = (\psi(w)/w) dw^2$ とかくことができる。関数 $|\psi|$ は劣調和なので、円 { w ; $|w| = r$ } における積分平均は r について単調増加である。よって

$$\begin{aligned} \int_D |\phi| &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{|\psi(r \exp(i\theta))|}{r} r d\theta dr \\ &\leq R \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\psi(r \exp(i\theta))| d\theta dr \\ &\leq R \int_E |\phi| \end{aligned}$$

この不等式が各成分 E において成立するから、命題の主張が成立する。

系 2.6 Y 上のノルム 1 のベルトラミ微分 μ の台が、 $Y(L, \text{cusp})$ に含まれているとする。このとき、 $\|d\beta(\mu)\| = O(\exp(-1/L))$ 。

証明 $\|\Theta\| \leq 1$ だから

$$\int_Y |\Theta(dT_p(z)^2)| \leq \int_{\Omega(Y)} |dT_p(z)^2| = \text{area}(T_p(\Omega(Y))) \leq \frac{\pi}{4} \text{diam}(T_p(\Omega(Y)))^2$$

ここで定理 2.4 と命題 2.5 より

$$\|d\beta(\mu)\| \leq O\left(\sup_p \frac{1}{\text{diam}(T_p(\Omega(Y)))^2} \int_{Y(L, \text{cusp})} |\Theta(dT_p(z)^2)|\right)$$

$$\leq O \left(\sup_p \frac{\exp(-1/L)}{\text{diam}(T_p(\Omega(Y)))^2} \int_Y |\Theta(dT_p(z)^2)| \right)$$

$$\leq O(\exp(-1/L))$$

3 Short geodesics

一次変換 $\gamma(z) = e^L z$ $L = 1 + i\theta$ に対して L を complex translation length と呼ぶ。 L の虚部は 2π の整数倍を除いて決る。リーマン球 \hat{C} から γ のふたつの固定点を除いてできる領域を Ω とかくことにする。 $\Omega/\langle\gamma\rangle = T$ はトーラスである。 T には自然に flat metric が入る。

二重連結領域が領域 $\{1 < |z| < \log M\}$ と等角同値であるとき M をその領域のモジュラスと呼ぶ。

g をトーラス T 中の γ が定めるホモトピー類の測地線とする。二重連結領域 $T - g$ のモジュラスを M とおく。容易に確かめられるように、

$$M = 4\pi^2 \text{Re}(1/L)。$$

p を Ω の点、 $m < M$ とする。 T における p の像を p' とおく。 p' から等距離にある g に平行な二本の閉測地線で囲まれたモジュラス m の二重連結領域を T から取り除く。こうしてできた二重連結領域を A とおく。 A の (Ω から T への被覆写像による) 逆像を B とおく。 B は、 γ の固定点を結ぶ二本の螺旋線によって囲まれた thickened spiral である。 B は次の四つの量に依存している。1. 一次変換 γ 2. complex translation length L 3. モジュラス m 4. 点 p 。これらへの依存を明記する必要があるときには $B(\gamma, L, m, p)$ と書く。

$T(p) = \infty$ なる一次変換 T に対してアファイン座標 $T(z)$ を z_p と書くことにする。 dz_p^2 は $Q(B)$ の元である。

定理 3.1 $4\pi < \mu < M/2$ に対して

$$\frac{\|\Theta_{B/A}(dz_p^2)\|}{\|dz_p^2\|} = O\left(\frac{m^2}{\exp(m/2)} + \frac{m^2}{M^2}\right)$$

ただしノルムはそれぞれ $Q(B)$ 及び $Q(A)$ におけるものである。

この節の目的は上の定理を証明することである。

注意. 後に考えるのは、 m が大きくてしかも $m \ll M$ なる場合である。 $m = 4 \log M$ の場合上式の右辺は $O(M^{-2}(\log M)^2)$ となる。

3.1 Spirals 計量 dz_p による B の形, すなわち $T_p(B)$ の評価をしよう。この節では γ, L, m, p を固定して $B = B(\gamma, L, m, p)$ とする。 γ の吸い込み固定点とわきだし固定点がそれぞれ 0 と 1 とに写されるように T_p を選ぶ。このとき $\Omega = \widehat{C} - \{0, 1\}$ であり

$$\gamma = N(e^L N^{-1}(z)), \quad N(z) = 1/(1-z)$$

複素平面 C は被覆写像 $z(s) = N(\exp(Ls))$ により Ω の普遍被覆面と見なすことができる。このとき

$$\begin{aligned} T &= C/\Lambda \quad \text{ただし} \\ \Lambda &= Z \oplus Z_\tau \\ \tau &= 2\pi i/L \end{aligned}$$

L の選び方から γ は写像 $s \rightarrow s+1$ に持ち上げられる。 s 平面からの被覆写像を

$$\begin{aligned} p_\Omega: C &\rightarrow C/Z_\tau = \Omega \\ p_T: C &\rightarrow C/\Lambda = T \end{aligned}$$

とかくことにする。 $y = [0, \text{Im } \tau/2]$ に対して、

$$C(y) = \{s; y < \text{Im } s < \text{Im } \tau - y\}$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} B &= p_\Omega(C(y)) \\ A &= p_T(C(y)) \end{aligned}$$

ただし、 $y = m / (4\pi)$ 。環状領域 A 及び $T - A$ に対して、

$$m = \text{mod}(T - A) = 4\pi y$$

$$M = \text{mod}(T - A) = 2\pi \text{Im } \tau$$

が成立する。 B は 0 から 1 へ向かう二本の螺旋線で囲まれている(図 3 参照)。

命題 3.2 1. $\text{diam } B \sim \frac{1}{|m L|}$

2. $m < M/2$ に対して $\text{area}(B) \sim (\text{diam } B)^2$.

ただしここで B は上のように正規化したものとし、面積及び直径は通常のユークリッド距離によるものとする。(すなわち、計量 dz_p で図ったものである。)

証明

1. 被覆写像 $p_\Omega: C \rightarrow \Omega$ の基本領域 $\{s; |\text{Im } s| < \text{Im } \tau / 2\}$ と $C(y)$ 及び $C(y) - \tau$ の交わり、すなわち領域 $\{s; y < |\text{Im } s| < \text{Im } \tau / 2\}$ における p_Ω の挙動を調べる。 $\{s; |\text{Im } s| = y\}$ の像が B の境界である。写像 $s \rightarrow e^{Ls} - 1$ は領域 $\{s; |s| < y\}$ で一対一正則であることに注意し、写像 $s \rightarrow (e^{Ls} - 1) / (yL)$ にケーベの $1/4$ 定理を適用すると写像 $s \rightarrow e^{Ls} - 1$ による領域 $\{s; |s| < y\}$ の像は 0 中心半径 $y|L|/4$ の円板を含むことが解る。 $p_\Omega(s) = 1 / (1 - e^{Ls})$ であるから、領域 $\{|\text{Im } s| < y\}$ の p_Ω による像は 0 を中心とする半径 $4 / (y|L|)$ の円板に含まれる。

$$\therefore \text{diam } B \leq 8 / (y|L|)$$

一方、 $0 \in \partial B$ であって ∂B の点 $p_\Omega(iy)$ に対し

$$|p_\Omega(iy)| = |1 / (1 - e^{Ly})| > e^{-|Ly|} / |Ly| \geq e^{-\pi} / |Ly|.$$

$$\therefore \text{diam } B \geq (|L|ye^\pi)^{-1}$$

$$\therefore \text{diam } B \sim (|L|m)^{-1}.$$

2. $m < M/2$ のとき $y < (\text{Im } \tau)/4$ であることに注意をする。領域 $R = \{s; \pi/3 < \arg(s) < (2/3)\pi, y/(\sin(\arg(s))) < |s| < 2y/(\sin(\arg(s)))\}$ は写像 p_Ω の基本領域 $\{| \text{Im } s| < \text{Im } \tau/2\}$ 及び $C(y)$ に含まれる。 $s \in R$ ならば $|Ls| \leq 4\pi$ であることに注意して

$$\begin{aligned} \text{area}(B) &\geq \iint_R \left(\frac{1}{e^{Ls} - 1} \right)' r d\theta dr \\ &\geq \iint_R \frac{1}{|L|^2 r^3 e^{6|Ls|}} r d\theta dr \\ &\geq \frac{1}{e^{24\pi} |L|^2} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sin \theta}{y} \right)^2 - \left(\frac{\sin \theta}{2y} \right)^2 \right) d\theta \\ &\geq \frac{3}{32 e^{24\pi} |Ly|^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{area}(B) \sim (\text{diam } B)^2$$

3.2 Descent to the torus

$\varphi = dz^2$, $\Phi = \sum_n (\gamma^n)^* \varphi$ とおく。このとき

$$\|\Theta_{B/A}\| = \int_{B_0} |\Phi|$$

ただし B_0 は B における $\langle \gamma \rangle$ の作用の基本領域である。同様に、

$$\psi(s) ds^2 = p_\Omega^*(\varphi), \quad \Psi(s) ds^2 = \sum_n \psi(s-n) ds^2$$

$$C_0(y) = \{s \in C(y); \text{Re } s \in [0, 1]\}$$

とおくと $C_0(y)$ は $C(y)$ における群 $\Lambda = Z \oplus Z_\tau$ の作用の基本領域で

$$\|\Theta_{B/A}\| = \int_{C_0} |\Psi|$$

である。従って、 $\|\Theta_{B/A}\|$ を評価するためには Ψ を計算すればよい。

命題 3.5 $s \in C(y)$, $y > 1$ に対して

$$\Psi(s) = O(|L| + |L|^{-2} \exp(-2\pi y))$$

証明 原論分では二重周期関数を用いて証明されている。ここでは、穴倉光宏氏による フーリエ級数をもちいたより簡潔な証明をあげておく。

$$\Psi(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(s+n) \quad \psi(s) = \frac{L^2 \exp(2Ls)}{(\exp(Ls) - 1)^4}$$

$$\operatorname{Re} L > 0, \quad \tau = 2\pi i / L$$

である。 $0 < t_0 < \operatorname{Im} \tau$ に対して

$$a_n = \int_{\{\zeta; \operatorname{Im} \zeta = t_0\}} \psi(\zeta) e^{2n\pi \zeta} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s + it_0) e^{-2n\pi(s + it_0)} ds$$

とおくと、

$$a_n = \int_0^1 \Psi(s + it_0) e^{-2n\pi(s + it_0)} ds$$

だから

$$\Psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2n\pi \zeta} \quad (\operatorname{Im} \zeta = t_0) \quad .$$

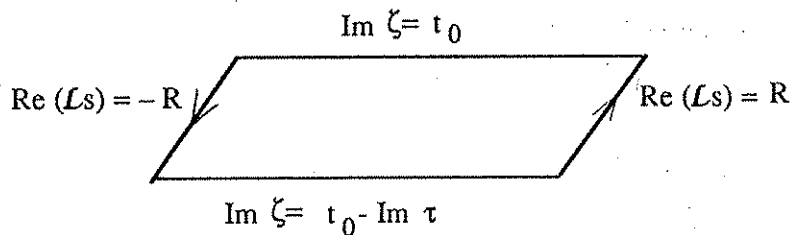
$0 < t_0 < \operatorname{Im} \tau$ の範囲で t_0 をうごかしても a_n は不変であることに注意する。 a_n を計算しよう。

$$\int \frac{dx}{(\sinh x)^4} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\cosh x}{\sinh x} \right)^3 + \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

を用いて

$$a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^2}{(\sinh L(s + it_0)/2)^4} ds = (8/3)L$$

$n \neq 0$ のときは下図のような積分路を用いて留数計算を行う。



$$\begin{aligned} & 2\pi i \operatorname{Res}_{\zeta=0} (\Psi(\zeta) e^{-2n\pi\zeta i}) \\ &= \int_{\{\zeta; \operatorname{Im} \zeta=0\}} \Psi(\zeta) e^{2n\pi\zeta i} d\zeta + \int_{\{\zeta; \operatorname{Im} \zeta=t_0 - \operatorname{Im} \tau\}} \Psi(\zeta) e^{2n\pi\zeta i} d\zeta \\ &= (e^{-2n\pi\tau i} - 1) a_n \quad (\Psi(\zeta - \tau) = \Psi(\zeta) \text{ に注意する。}) \end{aligned}$$

一方、上の留数を計算すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta=0} (\Psi(\zeta) e^{-2n\pi\zeta i}) &= 3^{-1} (n\pi i + 4n^3 \pi^3 i L^{-2}) \\ \therefore a_n &= 2\pi i (n\pi i + 4n^3 \pi^3 i L^{-2}) / (3(e^{-2n\pi\tau i} - 1)) \end{aligned}$$

ここで、 $s \in C(y)$, $y > 1$ とすると、

$$\begin{aligned} |\Psi(s) - a_0| &= \left| \sum_{n \neq 0} a_n e^{2n\pi s} \right| \\ &\leq \sum_{n \neq 0} \frac{2}{3} \left(\pi^2 |n| + \frac{4|n|^3 \pi^4}{|L|^2} \right) \left| \frac{e^{2n\pi s}}{e^{2n\pi\tau i} - 1} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\pi^2 n + \frac{4n^3 \pi^4}{|L|^2} \right) \left| \frac{e^{-2n\pi \operatorname{Im} s}}{1 - e^{-2n\pi \operatorname{Im} \tau}} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\pi^2 n + \frac{4n^3 \pi^4}{|L|^2} \right) \left| \frac{e^{2n\pi \operatorname{Im} s}}{e^{2n\pi \operatorname{Im} \tau} - 1} \right| \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\pi^2 n + \frac{4n^3 \pi^4}{|L|^2} \right) \frac{e^{-2n\pi \operatorname{Im} s} + e^{-2n\pi \operatorname{Im}(\tau-s)}}{1 - e^{-2n\pi \operatorname{Im} \tau}}$$

$1/(1 - e^{-2n\pi \operatorname{Im} \tau}) < 1/(1 - e^{-y\pi}) < 1/(1 - e^{-\pi})$ だから

$$\leq \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\pi^2 n + \frac{4n^3 \pi^4}{|L|^2} \right) \left((e^{-2\pi \operatorname{Im} s})^n + (e^{-2\pi \operatorname{Im}(\tau-s)})^n \right)$$

ここで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$$

であって、 $\operatorname{Im} s > y$, $\operatorname{Im}(\tau - s) > y$ であるから、

$$\left| \sum_{n \neq 0} a_n e^{2n\pi s} \right| \leq O((1 + |L|^{-2}) \exp(-2\pi y)) \\ = O(|L|^{-2} \exp(-2\pi y))$$

$$\therefore \Psi(s) = O(|L| + |L|^{-2} \exp(-2\pi y))$$

系 3.6 $y > 1$ に対して

$$\int_{C_0(y)} |\Psi(s) ds^2| = O(|L|/h + |L|^{-2} \exp(-2\pi y))$$

ただし、 $h = 1/(\operatorname{Im} \tau)$ 。

証明 $C_0(y)$ は幅 1 高さ $\operatorname{Im} \tau = 1/h$ の矩形である。 $C_0(y)$ に含まれる各 s に対して $y' = \min(\operatorname{Im} s, \operatorname{Im}(\tau - s))$ とおけば $s \in C(y')$ だから、命題 3.5 より

$$\Psi(s) = O(|L| + |L|^{-2} \exp(-2\pi y')) \\ \therefore \int_{C_0(y)} |\Psi(s) ds^2| = O \left(\int_y^{\frac{1}{h}-y} \left(\frac{\exp(-2\pi y')}{|L|^2} + |L| \right) dy' \right) \\ \leq O \left(\frac{1}{|L|^2} \int_y^{\infty} \exp(-2\pi y') dy' + \frac{|L|}{h} \right)$$

$$= O\left(\frac{\exp(-2\pi y')}{|\mathcal{L}|^2} + \frac{|\mathcal{L}|}{h}\right)$$

定理 3.1 の証明 $m = 4\pi y$, $M = 4\pi^2 \operatorname{Re}(1/\mathcal{L}) = 2\pi \operatorname{Im} \tau \sim 1/h$ であった。 $4\pi < m < 1/2$ なる仮定から $1 < y < \operatorname{Im} \tau / 4$ 。命題 3.2、系 3.6 からそれぞれ

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{Q(B)} &\sim 1/(|\mathcal{L}|^2 m^2) \\ \|\Theta_{B/A}(\varphi)\|_{Q(A)} &= O(|\mathcal{L}|/h + |\mathcal{L}|^{-2} \exp(-2\pi y)) \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\|Q_{B/A}(\varphi)\|_{Q(A)}}{\|\varphi\|_{Q(B)}} = O(m^2 \exp(-m/2) + m^2 |\mathcal{L}|^3 / h)$$

ここで $|\mathcal{L}| \leq h^2 \sim M^{-1}$ だから

$$|\mathcal{L}|^3 / h \leq h^2 = O(M^{-2})$$

よって定理は示された。

4 Organizing the sphere at infinity.

この節では、集合族 $\{B(\gamma); \gamma \in \Gamma_Y\}$ の元の重なり方について調べる。ただし B は 3 節で定義された thickened spiral である。

4.1 Tubes and shadows

定義 ある正数 ε_0 に対し、三次元双曲的多様体の中の同一点を通る長さ ε_0 以下の任意の二本の閉曲線は π_1 の可換部分群を生成する。この ε_0 を Margulis 定数と呼ぶ。

γ を H^3 に作用する斜航的一次変換とする。ある自然数 n に対して $d(x, \gamma^n x) < \varepsilon_0$ となる点 x の集合を γ の Margulis tube と呼ぶ。 γ の Margulis tube は、 γ の不変測地線 (H^3 の中で) を囲むシリンダーである。一つの離散群に含まれる γ と δ が異なる固定点を持つときそれらの Margulis tubes は交わらない。

γ の不変測地線 g からの距離が r 未満の点全体からなる集合を γ の r -tube と呼ぶ。

$H^3 \cup \widehat{C}$ 上のふたつの集合 E, F に対して、 F に始点を持ち E を通る測地的半直線の端点 ($\varepsilon \in \widehat{C}$) 全体の集合を、 F からの E の影 (shadow of E from F) と呼ぶ。

命題 4.1 $B = B(\gamma, L, m, p)$, $|L|$ は十分小さいとする。 L と m に関係なく p に無関係な $r = r(L, m)$ が存在して γ の r -tube τ は次の性質を持つ。

1. p からの τ の影 S は、 $B' = B(\gamma, L, m/2, p)$ の $\text{diam}_p(B')$ 近傍を含む。ただし、 diam_p とは計量 dz_p に関する直径を表すものとする。

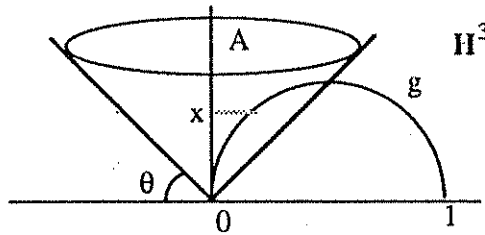
2. $\text{diam}_p S = O(\text{diam}_p(B))$

3. τ から $\log m - O(1)$ の距離にある点は、 γ の Margulis tube に含まれる。

証明 3節で行ったように、 γ の固定点が 0 と 1 で $p = \infty$ であるように正規化する。この正規化のもとで dz_p は通常のユークリッド計量である。また p からの影は H^3 から \hat{C} への通常の射影の像である。

まず、1と2を示す。 $m < M < 4\pi^2/|L|$ だから $|mL| < 4\pi^2$ 。よって $|mL|$ が小さい時を考察すればよい。

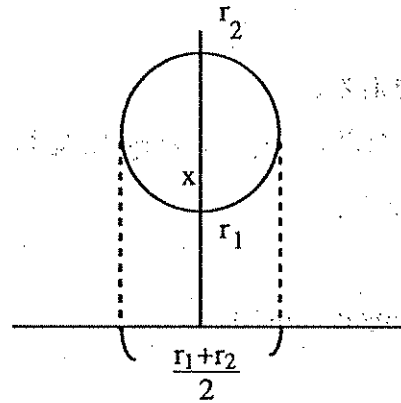
γ の不変測地線を g とおく。0と ∞ を結ぶ H^3 の双曲的直線を A とおく。



γ の tube の \hat{C} に近いところをみれば A のまわりの cone に近い形をしていることを利用して γ の tube の \hat{C} に近いところの様子を調べる。 g に含まれる高さ x の点と A の双曲的距離は $O(|x|)$ 。一方、正数 C を固定して A のまわりの $\log(C/|mL|)$ -tube を τ_A と書くことにすると正数 θ が存在して τ_A は図のように \hat{C} と角 θ をなす表面で囲まれた cone である。簡単な計算により $(C/|mL|) = |\tan(\theta/2)|^{-1}$ である。したがって、 C を十分大きくとるとき、 A のまわりの $\log(C/|mL|)$ -tube の高さ x までの部分の \hat{C} への射影は 直径 $2x/(\tan(\theta/2)) \approx 2x/(2 \tan(\theta/2)) = xC/|mL|$ 。一方、正数 x_0 を適当にとれば A に含まれる高さ x_0 以下の点は g との双曲的距離が 1 をこえない。したがって、 τ_A の高さ x_0 迄の部分は γ の $(\log(C/|mL|) + 1)$ -tube に含まれる。よって、 γ の $(\log(C/|mL|) + 1)$ -tube の \hat{C} への射影は 直径 $x_0 C/|mL|$ の集合を含む。 C を十分大きくとれば、命題 3.2 からこの tube は本命題の主張 1 を満たす。しかも上の議論から、この tube の高さ x_0 迄の部分の直径は $O(x_0 C/|mL|)$ である。

次に、測地線 g の \hat{C} から離れた部分の様子をみよう。 q を g の点で高さ $x \geq x_0$ なるものとする。 q を通り g に垂直なユークリッド平面で γ の $r' = \log(C/|mL|)$ tube をき

。その断面図の高さの上限を r_1 、下限を r_2 とおくと、



$$\log(x/r_1) = \log(r_2/x) = \log(C/|mL|) = r'$$

$$\therefore r_1 = xe^{-r'}, r_2 = xe^{r'}$$

$$(r_1+r_2)/2 \leq xe^{r'} \leq e^{r'} = C/|mL|$$

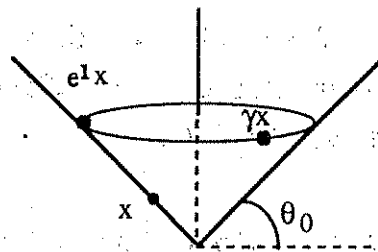
$$(r_1+r_2)/2 \geq xe^{r'}/2 \geq x_0 C/2|mL|$$

したがって、 γ の r' -tube の高さ x_0 以上の部分の影の直径は $O(x_0 C/|mL|)$ である。よって、定数 C を適当に選び

$$r = \log(C/|mL|)$$

とおけば、1と2の性質を持つことが解った。

次に3について考察する。今度は $\gamma = e^{1+i\theta}$ なるように正規化する。 γ の不変測地線 g は 0 と ∞ を結ぶ直線である。正数 d に対し、 $-\log|\tan(\theta_0/2)| = d$ を満たす正数 θ_0 をとる。 g からの双曲的距離が d であるような点 x に対し



$$d(x, \gamma x) \leq d(e^{1+x}, x) + d(e^{1+i\theta} x, x)$$

$$\leq \int_{|x| \sin \theta_0}^{e^{|x| \sin \theta_0}} \frac{dy}{y \sin \theta_0} + \int_0^{\theta_0} \frac{d|x| \cos \theta_0}{e^{|x| \sin \theta_0}} d\theta$$

$$= 1/\sin \theta_0 + \theta_0/\tan \theta_0$$

$$\leq 4|L|/\tan(\theta_0/2) \\ = 4|L|e^d.$$

ただし $d(\cdot, \cdot)$ は双曲的距離である。

$|L| < \varepsilon_0/4$, $m > 1$ とする。ただし、 ε_0 は Margulis 定数である。 $d = \log(\varepsilon_0/4|L|)$ とおけば、 $d(x, \gamma x) < \varepsilon_0$ であって、

$$d = r + \log m + \log(\varepsilon_0/4C')$$

ここで r, C' は 1、2 の証明に出てきたものである。よって γ の r -tube τ から距離 $\log m + \log(\varepsilon_0/4C')$ にある点は γ の Margulis tube に含まれる。

4.2 Scattered sets

定義 S をある距離空間における空でない開集合の族とする。ある正数 $a < 1$ があって、 S の任意の異なる元 S, S' に対して

$$d(S, S') \leq \text{diam } S \Rightarrow \frac{\text{diam } S}{\text{diam } S'} < a \quad \text{or} > 1/a$$

が成立するとき、 S は a -scattered であるという。

例 B を H^3 における双曲的単位球からなる族で B の任意のふたつの球は双曲的距離に関して d 以上離れているものとする。 B の元の ∞ からの影全体の集合を S とおく。正数 $a = O(e^d)$ が存在して S は a -scattered である (図 4 参照)。

族 S の全ての元の和集合を $\cup S$ と書くことにする。族 S が scattered のとき一般には $\cup S$ は連結でない。各連結成分の大きさは、その成分に含まれるある一つの元の大きさの定数倍でおさえられる。すなわち、

定理 4.2 族 S が a -scattered で $\cup S$ が連結であるとする。 $a < 1/3$ ならば S の元 S_0 が存在して $\cup S$ は S_0 の $3a \text{ diam } S_0$ 近傍に含まれる。

証明 $\text{diam } S_0 > 1/2 \sup \{ \text{diam } S; S \in S \}$ なる S_0 を選ぶ。 $\cup S$ は連結だから任意の $S \in S$ に対して有限 chain $S_0, S_1, \dots, S_n = S$ ($S_i \cap S_{i-1} \neq \emptyset$) が存在してそれによって S_0 と S とを結ぶことができる。 $d_k = \text{diam } S_k$ とおく。このとき次の

ことが成立する。

1. $2d_0 \geq d_k > 0 \quad \forall k$
2. $\sum_{i < k < j} d_k \leq d_i$ (又は d_j) ならば $d_i/d_j < a$ (又は $> a^{-1}$)

実際 $\sum_{i < k < j} d_k \leq d_i$ なら S は a -scattered なので $d(S_i, S_j) \leq a d_i$ だから。

補題 4.3 $a < 1/3$ とする。上の条件 1, 2 を満たす数の組 (d_0, \dots, d_n) に対して

$$\sum_1^n d_k \leq d_0 \left(\sum_1^n 2^{k-1} a^k \right) < 3ad_0。$$

S の任意の元は S_0 と有限 chain で結べるから、この補題を示せば定理 4.2 の証明が完了する。

補題の証明 帰納法によって示す。 $n=0$ の時は自明である。 n 迄のとき正しいと仮定して、 $n+1$ の場合にも正しいことを示す。 帰納法の仮定から $\sum_1^n d_k < d_0$ 。 条件 2 より $d_k < a d_0$, $k=1, \dots, n+1$ 。 $d_i = \max(d_1, \dots, d_{n+1})$ とする。 ふたつの chain (d_i, \dots, d_{n+1}) と $(d_i, d_{i-1}, \dots, d_1)$ はともに条件 1, 2 を満たす。 各々に帰納法の仮定を適用し、

$$\begin{aligned} \sum_1^{n+1} d_k &\leq d_i + d_i \left(\sum_1^i 2^{k-1} a^k \right) + d_i \left(\sum_1^{n+1-i} 2^{k-1} a^k \right) \\ &\leq d_i + 2 d_i \left(\sum_1^n 2^{k-1} a^k \right) \\ &= d_i + 2 d_i \left(1 + \sum_1^n 2^{k-1} a^k \right) \\ &\leq d_0 \left(a + \sum_1^n 2^k a^k \right) \\ &= d_0 \sum_1^{n+1} 2^{k-1} a^k \end{aligned}$$

4.3 Finding an invariant partition

Γ をねじれの無いクライン群、 G を H^3/Γ の (向きをついた) 閉測地線からなる集合とする。 G の上にあるような H^3 の測地線の集合を $\{\gamma_i\}$ とし、各 γ_i の Γ における固定化部分群の生成元 (与えられた向きに対応するもの) を γ_i とおく。各 γ_i に対してその complex translation length L_i が $2\pi i$ の整数倍を除いて決まる。今なんらかの自然な方法により L_i の値が決められているとしよう。例えば $\Gamma = \Gamma_X$ がリーマン面 X に対応するフックス群のとき、全ての L_i を実数と定める。リーマン面 X のタイヒミュラー空間上各 complex translation length が連続関数であるような値を定める。

$$M = \inf 4\pi^2 \operatorname{Re} 1/L_i$$

とおく。 $M > 0$ であると仮定しよう。いずれの γ_i の固定点でもない点 $p \in \hat{C}$ と $0 < m < M$ なる数 m に対して、前節のように thickened spiral

$$B_i = B_i(\gamma_i, L_i, m, p)$$

を構成する。

定理 4.4. $p = \infty$ なるよう正規化したとき 集合 $\cup B_i$ が有界であると仮定する。十分大きな m に対して $\{\gamma_i\}$ の部分列 $\{\gamma_j\}$ と互いに交わらない γ_j -不変集合 E_j が存在して

$$\begin{aligned} B_j(\gamma_j, L_j, m/2, p) \supset E_j \supset B_j(\gamma_j, L_j, m, p) \\ \cup E_j \supset \cup B_i \end{aligned}$$

証明 以下 $p = \infty$ として議論を進める。各 B_i に対して命題 4.1 のような tube をとり t_i とおく。 $\{t_i\}$ は Γ -不変である。 ∞ からの τ_i の影を T_i とおくと T_i は $B'_i = B'_i(\gamma_i, L_i, m/2, \infty)$ の diam B'_i 近傍を含む。(ここで diam はユークリッド距離で計ったものである。) また、 τ_i の $\log m - O(1)$ 近傍は γ_i の Margulis tube に含まれる。

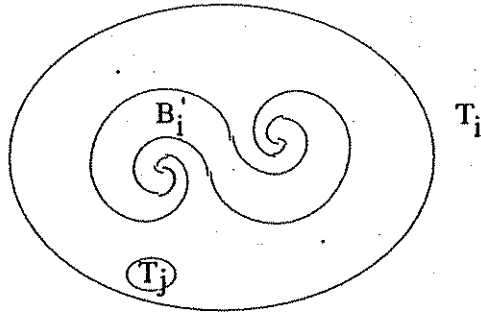
各 i に対して、 τ_i からの τ_j の影が B'_i と交わるような j を考える。その影を S_j と書くことにする。 $\cup S_j$ は γ_i -不変である。実際、 $\gamma_i(\tau_j)$ はある τ_k に一致し

$$S_k \cap B_i = \gamma_i(S_j) \cap \gamma_i(B_i) = \gamma_i(S_j \cap B_i) \neq \emptyset$$

であるから。(S_j を ∞ からの影と定義してしまうと γ_i -不変でなくなってしまうことに注意。) $\cup S_j$ の成分のうち B_i と交わるもの全てを B_i に加えてできる集合を E_i とおく。 E_i は γ_i -不変である。

Margulis tubes は互いに交わらないから、異なる τ_i 間の双曲的距離は $2 \log m - O(1)$ より小さくない。 4.2 節の例と同様に、 m が十分大きければ $\{T_i\}$ は $a = O(1/m^2)$ に対して a -scattered である。

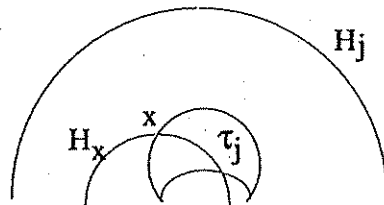
S_j と T_j とが同じような大きさをしていることを利用して $\{S_j\}$ が a' -scattered ($a' = O(1/m^2)$) であることを言う。まず、 T_i は T_j に含まれることに注意する。



実際、 T_i の直径は T_j の直径とは比が $O(m^2)$ であって $\text{diam } B_i$ とは比が有界だから、もしも m が大きくて T_i が T_j を含まなければ S_j と B_i とは交わり得ない。) τ_i は τ_j の上を被うように位置するから、

$$S_j \supset T_j$$

よって $\text{diam } S_j > \text{diam } T_j$ 。次にこの式の両辺の比は m が大きければ有界であることを言う。 τ_j に対して、 τ_j の頂点の真上に頂点を持ち τ_j の二倍の高さを持つ双曲的半空間を H_j とおく。



容易に解るように、 m が十分大きければ $\tau_i \cap H_j = \emptyset$ 。したがって、 τ_j の各点 x に対して x を頂点とする双曲的半空間を H_x とおけば、 $\tau_i \cap H_x = \emptyset$ 。 τ_i

の一点から出発して x を通る半直線は必ず Hx と交わるので、この半直線の終点は $H^3 \cup \widehat{C}$ における Hx の閉包に含まれる。すなわち、 τ_i からの τ_j の影は $\text{diam } \tau_j$ (ユークリッド距離による) を半径とする円板に含まれる。よって $\text{diam } S_j < 2 \text{ diam } T_j$ 。

ところで族 $\{T_j\}$ は a -scattered であるがさらに

$$d(T_j, T_k) < 2 \text{ diam } T_j \Rightarrow \text{diam } T_j / \text{diam } T_k < a' \text{ or } > 1/a', \quad a' = O(a)$$

なる性質を持つことが計算により確かめられる。($d(\cdot, \cdot)$ はユークリッド距離) したがって

$$d(S_j, S_k) < \text{diam } S_j \Rightarrow \text{diam } S_j / \text{diam } S_k < 2a' \text{ or } > 1/2 a', \\ a' = O(a) = O(m^{-2})$$

これで $\{S_j\}$ が a' -scattered であることが解った。 m が大きければ $a' < 1/3$ である。4.2節から $\cup S_j$ の各連結成分はその構成要素の内の一つと直径の比が有界である。また、各 S_j は T_j と直径の比が有界であり、 T_j は T_i と直径の比が $O(m^{-2})$ 。したがって、 $\cup S_j$ の各連結成分は B_i と比べて非常に小さい。 E_i はこれらの小さな集合を B_i に加えたものだから、 E_i が γ_i -不変であることを用いて $B'_i \supset E_i$ であることを示せる。したがって $T_i \supset E_i$ 。

$E_i \cap E_k \neq \emptyset$ ならば $E_k \supset E_i$ 又は $E_i \supset E_k$ であることをいう。 $E_i \cap E_k \neq \emptyset$ なら $T_k \cap B'_i \neq \emptyset, T_i \cap B'_k \neq \emptyset$ 。ここで $\{T_i\}$ は a -scattered であるから、 T_i と T_k のうちどちらか一方は (これを T_k としよう) 他方より著しく小さい。 T_i は B'_i の $\text{diam } B'_i$ ($\gg \text{diam } T_k$) 近傍を含んでいるから、 T_i は T_k を含む。したがって先と同様の議論から τ_i からの τ_k の影 S_k は ∞ からの τ_k の影 T_k を含む。またこのことから τ_i からの τ_k の影 S_k は E_k を含む。したがって $S_k \cap B'_i \supset T_k \cap B'_i \neq \emptyset, S_k \cap E_i \supset E_k \cap E_i \neq \emptyset$ 。 E_i の定義から S_k は E_i を構成する集合の一つである。したがって、 $E_i \supset S_k \supset E_k$ 。

集合族 $\{E_i\}$ に包含関係によって順序をいれる。すべての極大元からなる部分族を $\{E_j\}$ とすれば、これが求めるものである。

5. Quasifuchsian groups

話題をベアス埋め込みに戻す。 Γ_Y の斜航的元 γ の固定点の集合を F とおく。 γ はリーマン面 \bar{X} と Y 上の測地的閉曲線 $g_{\bar{X}}$ 及び g_Y を定める。それぞれのポアンカレ計量による長さを $L_{\bar{X}}$ 及び L_Y とおく。 Γ_Y の極限集合 Λ はトーラス $T = (\hat{C} - F) / \langle \gamma \rangle$ の上の二本の単純閉曲線に落され、トーラス T を二つの二重連結領域に分ける。それらのうち \bar{X} の被覆面になっている方を $A_{\bar{X}}$ 、 Y の被覆面になっている方を A_Y とおく。(図5参照) γ の complex translation length L を次のように定義する。 $\gamma(x) = \lambda x, |\lambda| > 1, 1 \in \Lambda$ なるよう正規化したとき $\log(1) = 0$ なる分枝を Λ に沿って解析接続した分枝にたいし $L = \log \lambda$ とおく。

次のふたつの命題はよく知られているものである。

命題 5.1

$$\begin{aligned} \text{mod}(A_{\bar{X}}) &= \frac{2\pi^2}{L_X}, \quad \text{mod}(A_Y) = \frac{2\pi^2}{L_Y} \\ \text{Re} \frac{1}{L} &\geq \frac{1}{L_X} + \frac{1}{L_Y} \end{aligned}$$

この命題は局地的長さの議論から従う。

命題 5.2

1. 0 と ∞ とを分離する C の二重連結領域 A は円環 $B = \{z \in C; r < |z| < R\}$ で $\text{mod} B = O(\text{mod} A) - O(1)$ なるものを含む。
2. トーラス T 上の二重連結領域 A は $\text{mod} B = O(\text{mod} A) - O(1)$ なる二重連結領域 B でその境界が T の測地線であるものを含む。

証明

1. ∂A の 0 を含む成分に含まれる点のうち絶対値が最大のものを z_1 、 ∞ を含む成分に含まれる点のうち絶対値最小のものを z_2 とおきそれぞれの絶対値を r 、 R とおく。二重連結領域 A は二点 $0, z_1$ を二点 ∞, z_2 から分離するから、 $A' = \hat{C} - \{x; -r \leq x \leq 0, \text{ or } x \geq R\}$ とおけば $\text{mod} A \leq \text{mod} A'$ タイヒミュラーの環状領域 A' のモジュラスについての既知の評価から(cf. [LV], II) $\text{mod} A'$ が大きいとき $\text{mod} A' = \log R/r + O(1)$ 。よって $\text{mod} A$ が大きいとき R/r は大きくなり、 A は円環 $B = \{r < |z| < R\}$ を含む。ここで $\text{mod} B = R/r$ だから命題の主張は正しい。

2. 双曲的一次変換 a によってトーラス T を $T = C^* / \langle a \rangle$ と表現することができる。 A が定める T のホモトピー類と a の定める T のホモトピー類が $\pi_1(T)$ を生

成するとしてよい。A を C^* に持ち上げるとその成分は A と同じモジュラスを持つ二重連結領域になる。これに 1 を適用すれば 2 の主張が得られる。

定理 1.2 の証明 μ を Y の単射半径 $L < 1/2$ の部分に台を持つノルム 1 のベルトラミ微分とする。 $Y(L, \text{cusp})$ に含まれる部分の寄与は 定理 2.6 から $e^{-1/L} = O(L^2)$ である。したがって、 μ の台は短い測地線のまわりにあるとしてよい。 μ の $\Omega(Y)$ への持ち上げを同じ文字 μ で表すことにする。

$\Omega(\bar{X})$ の点 p を固定し、 $z_p(p) = \infty$ なるアフィン座標をとる。(すなわち、 $T_p(p) = \infty$ なる一次変換をほどこした後に通常の座標を用いる。) 以下 $\text{area}_p, \text{diam}_p$ 等をこの座標で考えた面積及び直径とする。 G を H^3/Γ_Y の閉測地線で長さ L 未満のもの全体の集合とする。 G の各元に向きをつける。 G の元 g に対して g に対応する Γ_Y の元の complex translation length を $L(g)$ と書くことにする。命題 5.1 より、

$$M = 2\pi^2/L \leq 4\pi^2 \text{Re}(1/L(g))$$

$1/2$ により小さい L に対して

$$m = 8 \log(1/L)$$

とおけば $m < M$ である。

G の元に対応する全ての thickened spiral $B_i = B(\gamma_i, L_i, m, p)$ を考える。各 i に対して B_i はトーラス T_i の二重連結領域 A_i の被覆面である。

$\|d\beta(\mu)\| = O(1)$ だから、 $\|d\beta(\mu)\| = O((L \log 1/L)^2)$ をいうためには L が十分小さいときのみを考察すればよい。 L が 0 に近づく時、 m と M は ∞ に近付き $m \ll M$ であることに注意する。

補題 5.3 L が十分小さいとき

1. μ の台は $\cup B_i$ に含まれる。

$$2. \frac{\text{area}_p(\cup B_i)}{\text{diam}_p(\Lambda)^2} = O\left(1 + \frac{1}{(\text{short}(X))^2}\right)$$

ただし $\text{short}(X)$ はリーマン面 X の閉測地線のうち最も短いものの長さを表す。

証明 μ に対する仮定から、 μ の台に含まれる点 z に対して Γ_Y の斜航的変換 γ_i

が存在して z_i と $\gamma_i(z)$ の $\Omega(Y)$ におけるポアンカレ距離は L より小さい。 $z \in B_i$ であることをいうためには、 $A_Y = \Omega(Y) / \langle \gamma_i \rangle$ の L -thin part $A_Y(L)$ が A_i に含まれることをいえばよい。 $A_Y - A_Y(L)$ はモジュラス $\sim 1/L$ の二つの二重連結領域からなる。 L が小さいとき、命題 5.2 からこれらの領域に含まれるモジュラス $\sim 1/L$ の二重連結領域でその境界が測地線からなるものが存在する。これらはトーラス T_i における点 p の像と $A_Y(L)$ を分離するから、 p を中心とするモジュラス $m \ll 1/L$ なる領域 $T_i - A_i$ と $A_Y(L)$ とは交わり得ない。よって $A_Y(L) \supset A_i$ 。

2. 二重連結領域 $A_{\bar{X}} = \Omega(\bar{X}) / \langle \gamma_i \rangle$ のモジュラスは高々 $\frac{2\pi^2}{\text{short}(X)}$ だから、モジュラス $m' = \frac{2\pi^2}{\text{short}(X)} + 1$ の二重連結領域を含み得ない。 $B' = B(\gamma_i, L_i, m', p)$ とおく。 B' に対し、3.1節のような正規化を行う。

このとき、 $\Lambda \subset B'$ より

$$\text{diam}_p(B') = O(\text{diam}_p \Lambda)$$

であることがわかる。実際、 B' に対して3.1節で考えたような帯状領域 $C(y')$ を考える。曲線 $\{x + iy'; 0 \leq x \leq 1\}$ は p_Ω により B' の境界の中に写され、その像の各点は 0 から $\sim \text{diam}_p(B') (= O(1/|mL|))$ の距離にある。 $\Lambda \cap \partial B' \neq \emptyset$ で $\Lambda \cap \partial B'$ は γ_i 不変なので、このような像は Λ と交わる。また $0 \in \Lambda$ だから $\text{diam}_p \Lambda = O(\text{diam}_p(B'))$ 。

さて、

$$\frac{\text{diam}_p B_i}{\text{diam}_p B'_i} \sim \frac{1}{\frac{m'|L|}{1}} = \frac{m'}{m}$$

よって

$$\text{diam}_p B_i \sim \frac{m'}{m} O(\text{diam}_p \Lambda)$$

各 B_i は Λ と交わるので、 Λ の $\frac{m'}{m} O(\text{diam}_p \Lambda)$ -近傍は $\cup B_i$ を含む。したがって

$$\frac{\text{diam}_p(\cup B_i)}{(\text{diam}_p \Lambda)^2} = O\left(\left(1 + \frac{m'}{m}\right)^2\right)$$

ここで、 L が小さければ $m > 1$ だから、補題の主張は示された。

定理 1.2 の証明に戻ろう。 L が小さいとき、定理 4.4 を適用して $\cup B_i$ の被覆 $\{E_j\}$ を得る。各 j に対して Γ_γ の元 γ が存在して

$$\gamma(E_j) = E_j$$

$$B(\gamma, L, m, p) \subset E_j \subset B(\gamma, L, m/2, p) =: B$$

ただし L は γ の complex translation length である。 $Q(B)$ ノルムにおいて

$$\|dz_p^2\| = \text{area}_p(B) = O(\text{area}_p(E_j))$$

であることに注意する。ベルトラミ微分 μ を E_j に制限したものを ν とおく。 $m = 4 \log 1/L$ と $M > 2\pi^2/L$ に対して定理 3.1 を適用して

$$\left| \int_{E_j} \mu(z_p) |dz_p|^2 \right| = \left| \int_B \nu(z_p) |dz_p|^2 \right| \leq \|\Theta_{A/B}(dz_p^2)\| \leq O(L \log \frac{1}{L})^2 \text{area}_p(E_j)$$

$\{E_j\}$ は互いに交わらない μ の台の被覆であるから、上の式から $\int_{E_j} \mu(z_p) |dz_p|^2$ を $\text{area}_p(\cup E_j) \sim \text{area}_p(\cup B_i)$ で抑えることができる。補題 5.3 のふたつめの主張から

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_j} \mu(z_p) |dz_p|^2 \right| &= O\left((L \log \frac{1}{L})^2 \frac{\text{area}_p(\cup B_i)}{(\text{diam}_p \Lambda)^2} \right) \\ &= O\left((L \log \frac{1}{L})^2 \left(1 + \frac{1}{(\text{short}(X))^2} \right) \right) \end{aligned}$$

これと定理 2.2 とをあわせれば、 $\|d\beta(\mu)\|$ の求める評価が得られる。

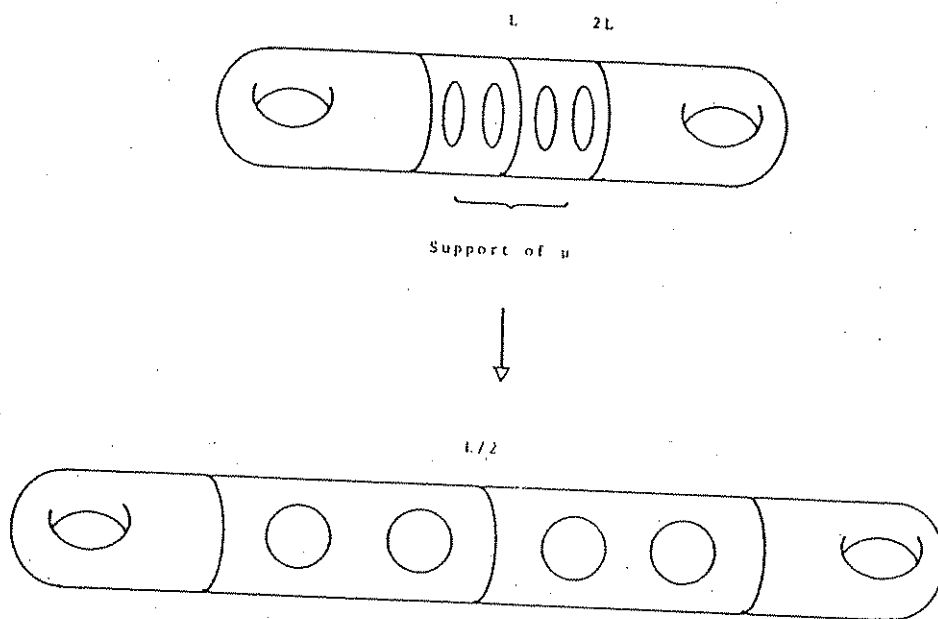


Figure 1. Pinching supported in the thin part.

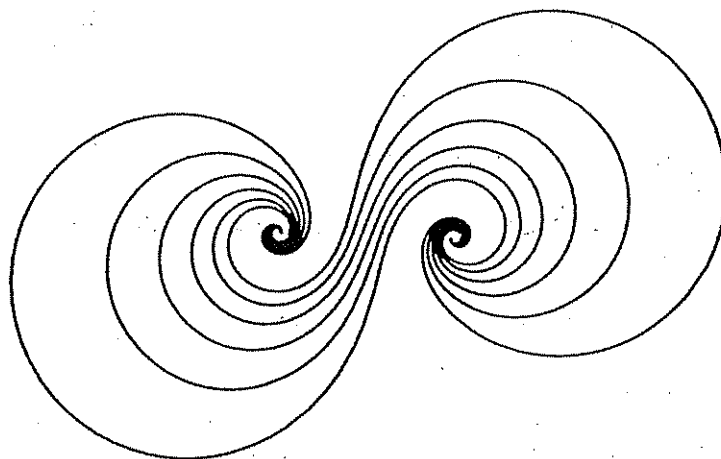


Figure 2. An invariant linefield for a short geodesic.

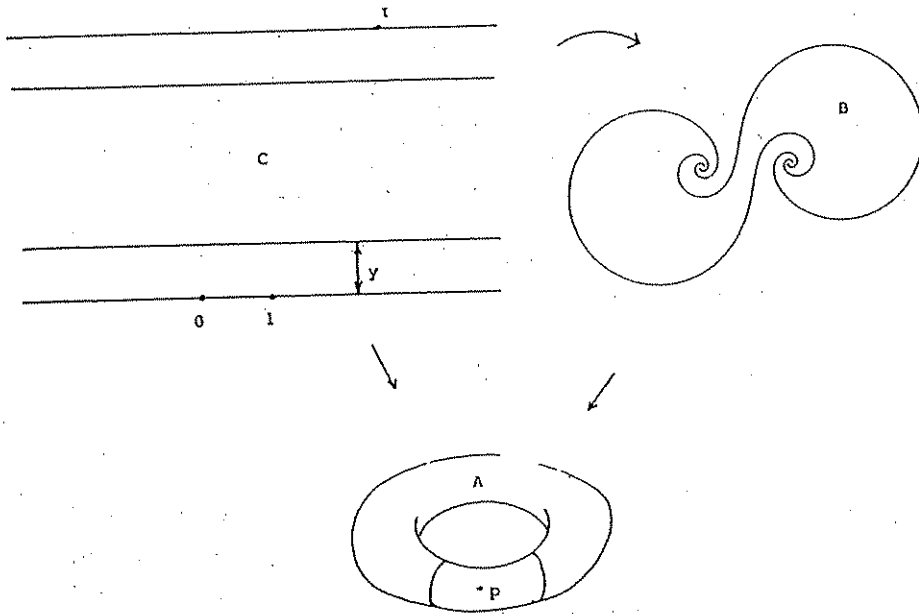


Figure 3. Spirals

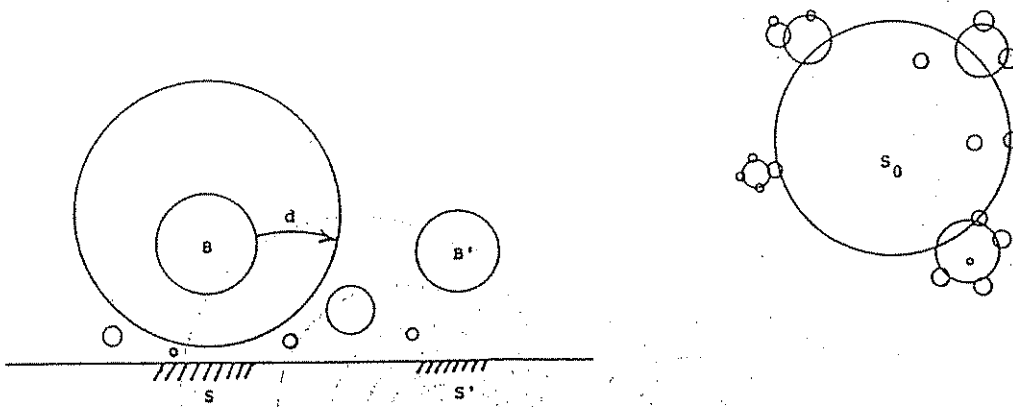


Figure 4. Shadows of disjoint hyperbolic balls.

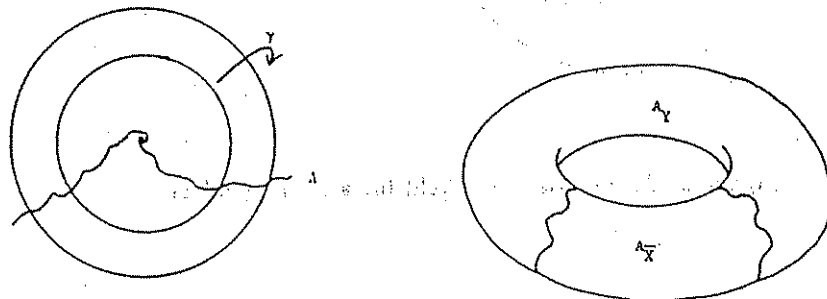


Figure 5. Quotient torus for a short geodesic.

References

- [Ab1] W. Abikoff. On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups: III. *Acta Math.* 134(1975), 211-237.
- [Ab2] W. Abikoff. Degenerating families of Riemann surfaces. *Annals of Math.* 105(1977), 29-44.
- [AB] L. Ahlfors and L. Bers. Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Annals of Math.* 72(1960), 385-404.
- [Bers1] L. Bers. Simultaneous uniformization. *Bull. AMS* 66(1960), 94-97.
- [Bers2] L. Bers. A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings. *Acta Math.* 116(1966), 113-134.
- [Bers3] L. Bers. On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups: I. *Annals of Math.* 91(1970), 570-600.
- [Bers4] L. Bers. Spaces of Kleinian groups. In *Several Complex Variables I, Maryland 1970*, pages 9-34. Springer Lecture Notes in Math. 155, 1970.
- [Bers5] L. Bers. Holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups. *J. of Math. of Kyoto University* 26(1986), 73-76.
- [Bon] F. Bonahon. Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3. *Annals of Math.* 124(1986), 71-158.
- [Gar] F. Gardiner. *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*. Wiley Interscience, 1987.
- [Hej] D. A. Hejhal. Regular b-groups and repeated Dehn twists. In *Complex Analysis, Joensuu 1987*, pages 169-192. Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 1351, 1988.
- [Ehr] L. Ehrenpreis. Holes in moduli spaces. In *Proceedings of the conference on quasiconformal mappings, moduli and discontinuous groups*, pages 30-38. Tulane Univ., 1965.
- [LV] O. Lehto and K.J. Virtanen. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. Springer-Verlag, 1973.
- [Mar] A. Marden. Geometric relations between homeomorphic Riemann surfaces. *Bull. AMS* 3(1980), 1001-1017.
- [Mask1] B. Maskit. On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups: II. *Annals of Math.* 91(1970), 607-639.
- [Mask2] B. Maskit. Self mappings of Kleinian groups. *Amer. J. Math.* 93(1971), 840-856.
- [Mc] C. McMullen. Iteration on Teichmüller space. *To appear, Inv. Math.*
- [Neh] Z. Nehari. Schwarzian derivatives and schlicht functions. *Bull. AMS* 55(1949), 545-551.