

円辺形と球面体の変形空間及び極限集合

蔭山 亮

序文

はじめに、この研究を始めるに至った経緯を述べる。修士初期、アドバイザーである系先生との打ち合わせの際、研究室に貼られていた1枚の写真に目が留まった。この写真の図形について詳しく尋ねたところ、今日研究するに至った球面体に関する極限集合の写真であった。この図形を眺めていくうちに、なぜこのような図形が描かれるのか、これはどのような性質を持っているのかなどを深く知りたいと思い、修士過程で研究することにした。この極限集合を研究するにあたって、まず、[1]を用いて双曲幾何学の定義から始め、主に双曲空間に関するいくつかのモデル上の測地線を学んだ。さらに、等長変換を用いることで各モデルの互換性について学んだ。次に、[2, Chapter 3]を用いて n 次元空間における平面、球面に関する鏡映変換の合成からなるメビウス変換とその性質などを学んだ。さらに、[3]を用いて球面を面にもつ球面体の変形空間について学んだ。球面体の極限集合について考察する前に、1次元を下げた円辺形の変形空間及び極限集合について考察することにした。そこで、学んだことを応用し、球面体に関する極限集合について考察した。

それでは、本論文で取り上げる円辺形及び球面体、極限集合について述べる。円辺形は次のように定義される。無限遠点 ∞ を加えた複素平面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の2次元閉円盤 D_1, \dots, D_n に対して、 $\hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{i=1}^n D_i$ が2つの連結成分をもち、それぞれが2次元開円盤と同相であるとき、この連結成分を円辺形という。また、球面体も次のように定義される。無限遠点 ∞ を加えた3次元空間 $\hat{\mathbb{R}}^3 := \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 上の3次元閉球体 B_1, \dots, B_n に対して、 $\hat{\mathbb{R}}^3 - \bigcup_{i=1}^n B_i$ が2つの連結成分をもち、それぞれが3次元開球体と同相であるとき、この連結成分を球面体という。さらに、私が目標としている球面体に関する極限集合は次のように定義される。球面体 P をなす球面 ∂B_i に関する鏡映変換 ϕ_i から生成される群を $\Gamma := \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$ とすると、 $\Lambda(\Gamma) := \partial(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma P)$ を球面体に関する極限集合という。球面体に関する極限集合は一般にフラクタル図形、すなわち自己相似形であり、球面を部分的に膨らませたような図形となる。この膨らみに関しては、球体にレンズ状の図形の挟み込みによる変形を考えることで、極限集合の成り立ちを考察することができる。

球面体に関する極限集合を考察する準備として、まず1次元を下げた円辺形の変形空間及び極限集合を考察することにした。円辺形について考えるにあたり、これに関する論文を見つけられなかったため、定義から変形空間、極限集合まで独自に考察したことを第1章で述べてある。また、球面体の変形空間については論文[3]を参考に第2章2.1節から2.5節までにまとめている。また、球面体の極限集合については第1章で学んだ円辺形に関する極限集合を応用し、独自に考察したことを第2章2.6節、2.7節で述べてある。従って、第2章2.1節から2.5節を少数クラス報告、第1章及び第2章2.6節、2.7節を研究報告とし、合わせて修士論文とする。本論文の詳しい構成は以下のようになっている。

第1章では $\hat{\mathbb{C}}$ における円多角形, 中でも4つの互いに隣接している円盤がなす4円多角形について考察する. 4円多角形の変形空間を考えるにあたり, 向きを保つメビウス変換, すなわち1次分数変換による同一視(同値関係)を導入することで, その同値類の集合(変形空間)を考えることができる. この同値関係の代表元として, 1頂点が無限遠点となる正規化と, 4円多角形をなす円のうち, 向かい合う2円のうち1組が同心円状となる正規化を考えた. それぞれの正規化を用いることで, 変形空間を2次元平面上に実現することができる. また, この2つの正規化のパラメータの互換性についても考えた. さらに, 4円多角形は定義より同時に2つ得られるため, この2つの4円多角形の関係を考えた. 次に, 4円多角形に関する極限集合について考察した. 2次元平面上の極限集合も3次元空間のときと同様に, 4円多角形をなす4円の鏡映変換の合成から定義できる. このとき, 4円多角形に関する極限集合は一般にフラクタル図形であり, 円を部分的に膨らませたような図形になる. 4円多角形を変形するとき, この極限集合がどのように変形するかを考えた. 具体的には, 極限集合が円となるような4円多角形にレンズ状の図形を挟み込むような変形を考えることで, 極限集合を考察した.

第2章では, まず [3] の紹介, すなわち $\hat{\mathbb{R}}^3$ における球面体, 中でも立方体と同じ面構造をもち, 各球面のなす角が π を割り切る角で, 各辺が頂点で互いに接している球面立方体の変形空間を学んだ. 球面立方体の場合も同様, メビウス変換による同一視, 具体的には1頂点が無限遠点となる正規化を導入することで, 変形空間を考えた. またここでは, 各面角が π を割り切る角に制限していることから, 変形空間を2次元平面上に実現することができる. 2.6節からは自身の考察であり, 4円多角形に関する極限集合を応用して, 球面立方体の極限集合の変形を考察した. 4円多角形のときと同様に, 極限集合が球面となるような球面立方体にレンズ状の図形を挟み込むような変形を導入することで, 極限集合が得られると考えている. しかし, レンズ状の図形の挟み込む位置についての明確な理由を見つけることができなかった. そこで, 本論文では特別な場合に限って考察した.

本論文中に出てくる図は, Cinderella と GeoGebra というソフトを用いて作成したものである. 両ソフトとも難解なプログラミングをすることなく, 簡単に作図することが可能である.

終わりに, 本論文を作成するにあたり, 2年間熱心なご指導をいただいたアドバイザーの系 健太郎先生, 資料を提供していただいた明治大学 阿原 一志先生, 同大学学生 中村 建人さん, 荒木 義明先生に深謝致します.

目次

第1章	円多角形	5
1.1	準備	5
1.2	鉛直系への正規化	10
1.3	同心系への正規化	15
1.4	鉛直系と同心系の互換性	19
1.5	4円多角形と対4円多角形	21
1.6	極限集合	22
1.7	レンズ	24
第2章	球面体	27
2.1	準備	27
2.2	鉛直系への正規化	33
2.3	逆の成立	38
2.4	パラメータ空間	42
2.5	その他の面角に対するパラメータ空間	44
2.6	極限集合	48
2.7	レンズ	50

第1章 円形

1.1 準備

本章では、以下に定める1次分数変換、メビウス変換を利用して、複素平面 \mathbb{C} に無限遠点 ∞ を加えた空間 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の円形の変形空間について考えていきたい。その準備として、以下の定義を与える。

定義 1.1.1. 円と直線

(1) \mathbb{C} 上の円と2次元円盤

$a \in \mathbb{C}, r > 0$ に対して

$$C(a, r) := \{z \in \mathbb{C} ; |z - a| = r\}$$

と書ける集合 $C(a, r)$ を \mathbb{C} 上の円という。さらに

$$D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} ; |z - a| < r\}$$

と書ける集合 $D(a, r)$ を \mathbb{C} 上の2次元円盤という。

(2) \mathbb{C} 上の直線

$b \in \mathbb{C} - \{0\}, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$L(b, t) := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} \bar{b}z = t\}$$

と書ける集合 $L(b, t)$ を \mathbb{C} 上の直線という。

(3) $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円

\mathbb{C} 上の直線は ∞ を通る円と見なすことができるので、 \mathbb{C} 上の円及び直線を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円という。さらに、 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円を境界にもつ領域を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の2次元円盤という。以下では、特に区別しない限り直線も含め、単に円、円盤という。

定義 1.1.2. 1次分数変換

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad ad - bc \neq 0$$

と書ける写像 f を1次分数変換という。このとき、 $f(\infty) = \frac{a}{c}$, $f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ とすると、写像 f は $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で定義できる。

特に, $f(z) = \alpha z + \beta$ の形で平行移動, 拡大, 回転を表す. また, 1 次分数変換は向きと円を保つ. さらに, 等角写像なので 2 円の交わりの角度を保つ. 1 次分数変換に対して, 次の定理が存在する.

定理 1.1.3. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の任意の相異なる 3 点 A, B, C と相異なる 3 点 A', B', C' に対して, $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$ となる 1 次分数変換 f が成り立つ.

証明. 初めに $f(A) = 0, f(B) = 1, f(C) = \infty$ となる f が存在することを示す. 実際に

$$f(z) = \frac{z - A}{z - C} \cdot \frac{B - C}{B - A}$$

とすれば, これは条件を満たす. さらに, $A' \mapsto 0, B' \mapsto 1, C' \mapsto \infty$ なる 1 次分数変換の逆変換との合成を考えれば, 題意を満たす変換を求めることができる. \square

定義 1.1.4. 鏡映変換とメビウス変換

(1) 円に関する鏡映変換

円 $C(a, r)$ に対して

$$f_C(z) := a + \left(\frac{r}{|z - a|} \right)^2 (z - a)$$

と書ける写像 f_C を円に関する鏡映変換という. このとき, $f_C(\infty) = a, f_C^{-1}(\infty) = a$ とすることで写像 f_C は $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で定義できる. さらに, $f_C = f_C^{-1}$ であることに注意する.

(2) 直線に関する鏡映変換

直線 $L(b, t)$ に対して

$$f_L(z) := z - \frac{2[\operatorname{Re} \bar{b}z - t]}{|b|^2} b$$

と書ける写像 f_L を直線に関する鏡映変換という. このとき, $f_L(\infty) = \infty$ とすることで写像 f_L は $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で定義できる. さらに, $f_L = f_L^{-1}$ であることに注意する.

(3) メビウス変換

$\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に関する鏡映変換の有限個の合成からなる変換を $\hat{\mathbb{C}}$ におけるメビウス変換といい, その集合を $\operatorname{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ と表す. メビウス変換は鏡映変換のみならず, 平行移動, 拡大, 回転を表すことができ, 角度と円を保つ.

ここで, 鏡映変換は向きを保たないことに注意する. 従って, 鏡映変換の偶数個の合成からなるメビウス変換は向きを保ち, 奇数個の合成からなるものは向きを保たない. このことから, $\hat{\mathbb{C}}$ における鏡映変換の偶数個の合成からなるメビウス変換の集合と 1 次分数変換の集合は等しいので, この集合を $\operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ と表す.

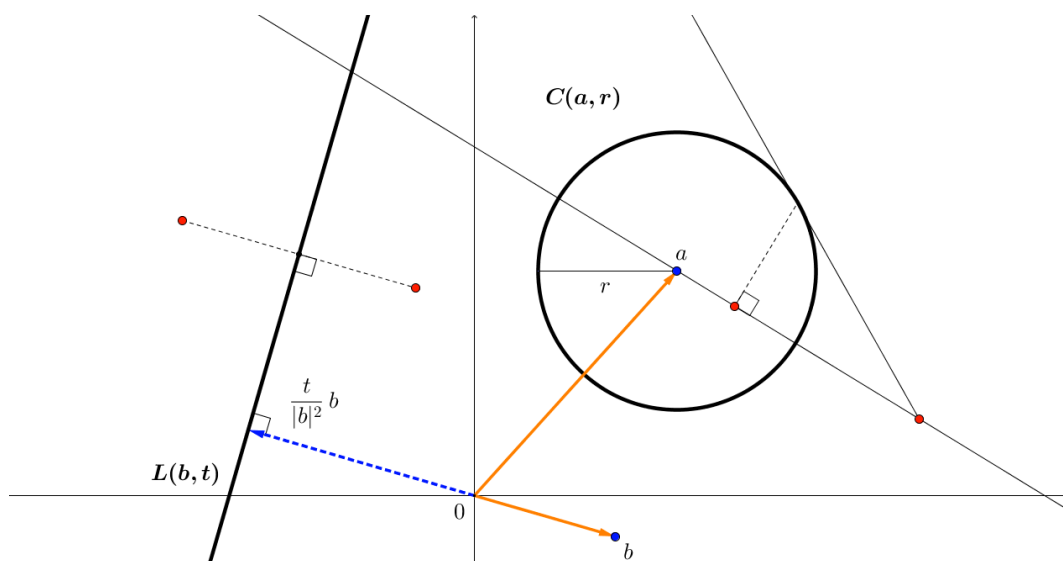


図 1.1: 円, 直線に関する鏡映変換

これから考えていきたい円辺形を次のように定義する.

定義 1.1.5.

(1) 円辺形

$\hat{\mathbb{C}}$ 上の 2 次元閉円盤 D_1, \dots, D_n に対して, $\hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{i=1}^n D_i$ が 2 つの連結成分 P, Q をもち, それぞれが 2 次元開円盤と同相であるとき, 成分 P または Q を円辺形という. 以下では, 便宜上円辺形は閉包をとることによって閉集合にする.

(2) 辺・頂点

$C_i := \partial D_i$ とし, 円辺形 P に対して, $e_i := P \cap C_i$ を辺という. さらに, $e_i \cap e_j$ が空集合でないとき, $v_{ij} := e_i \cap e_j$ を頂点という.

(3) 理想性

円辺形 P に対して, 図 1.2 のような構成する円同士が隣接する, すなわち任意の頂点 v_{ij} における 2 辺 e_i, e_j のなす角が 0 であるとき, 円辺形 P は理想的であるという. 本論文では, この性質をもつ理想円辺形についてのみ考えるので以下では単に円辺形という.

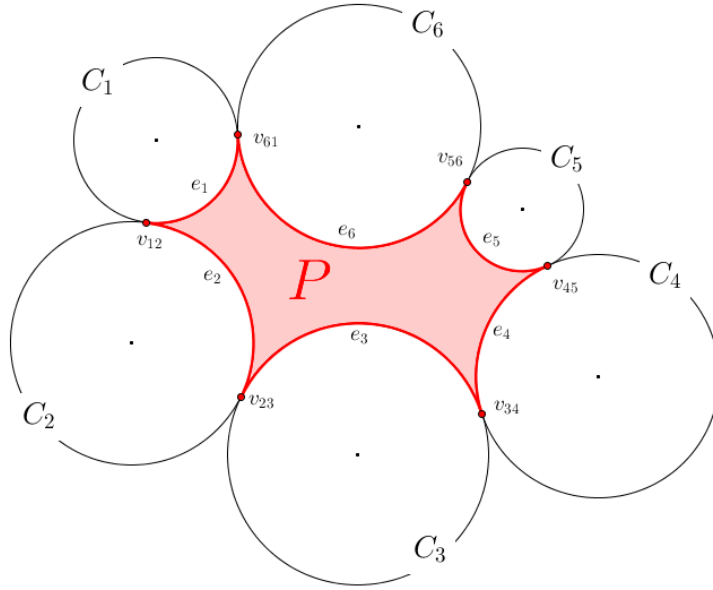


図 1.2: $n = 6$ のときの円多角形

本章では、円多角形の変形空間について考えたい。そこで、次のような同値関係を定義する。

定義 1.1.6.

(1) マーク

円多角形 P に対して、 P の向きから定まる向きを ∂P に入れる。この向きの順に P の頂点に v_1, \dots, v_n と名前をつけたとき、 P と v_1, \dots, v_n の組みを $(P; v_1, \dots, v_n)$ または単に (P) と表し、これらをマーク付き円多角形という。すなわち、 $(P; v_1, \dots, v_n)$, $(P; v_2, \dots, v_n, v_1)$, $(P; v_3, \dots, v_n, v_1, v_2)$ などは区別する。ただし、 $(P; v_n, \dots, v_1)$ などは考えないものとする。

(2) 同値関係 \sim

2つのマーク付き円多角形 $(P; v_1, \dots, v_n)$, $(P'; v'_1, \dots, v'_n)$ に対して、次の同値関係 \sim を定める。すなわち、 $(P; v_1, \dots, v_n) \sim (P'; v'_1, \dots, v'_n)$ であるとは、ある1次分数変換 $f \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ が存在して、 $f(P) = P'$ 、任意の i に対して $f(v_i) = v'_i$ を満たすときをいう。さらに、 $(P; v_1, \dots, v_n)$ の同値類を $[(P; v_1, \dots, v_n)]$ と表し、マーク付き円多角形の集合の \sim による同値類の集合を

$$\mathcal{M}_n^{\text{mark}} := \{[(P; v_1, \dots, v_n)]\}$$

と表す。

(3) 同値関係 \approx

2つの円多角形 P, P' に対して、次の同値関係 \approx を定める。すなわち、 $P \approx P'$ であるとは、ある1次分数変換 $f \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ が存在して、 $f(P) = P'$ を満たすときをいう。さらに、 P の \approx による同値類を $[P]$ と表し、円多角形の集合の同値類の集合を

$$\mathcal{M}_n := \{[P]\}$$

と表す.

以下では, (P) と書けばマーク付きであることを意味し, P と書けばマーク付きでない単なる円辺形を意味することと約束する.

本論文では, 主に $n = 4$ のときである 4 円辺形について考える. 以下では, 4 円辺形 P に対して, 図 1.3 のように各頂点を A, B, C, D とし, 辺 \widehat{AB} を弧にもつ円を C_1, \dots , 辺 \widehat{DA} を弧にもつ円を C_4 とする.

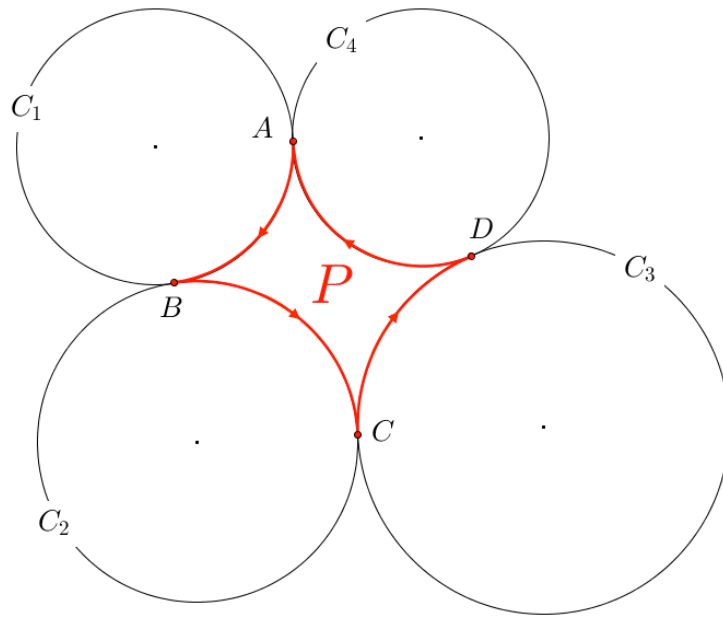


図 1.3: マーク付き 4 円辺形 $(P; A, B, C, D)$

1.2 鉛直系への正規化

定義 1.1.6 (2) で定義した同値関係 \sim によりマーク付き 4 円边形同士を互いに同一視することを考える. そこで, 与えられたマーク付き 4 円边形 $(P; A, B, C, D)$ の次のような正規化を考える.

$A = 0, D = \infty$ とすると, 円 C_4 は原点を通る直線, 円 C_3 はそれに平行な直線となる. さらに, 必要ならば 1 次分数変換で写すことで, 円 C_3 を $z = 1$ を通り実軸と垂直な直線と仮定してよい. このとき, 頂点 B を決めることで, 2 円 C_1, C_2 が唯一つ定まる. ここで, B は $0 < \operatorname{Re} B < 1$ でなければならないことに注意する. さらに, 補題 1.2.1 で取り上げるように, 初等幾何を用いることで頂点 C が定まる. このような正規化により得られた 4 円边形を鉛直系という.

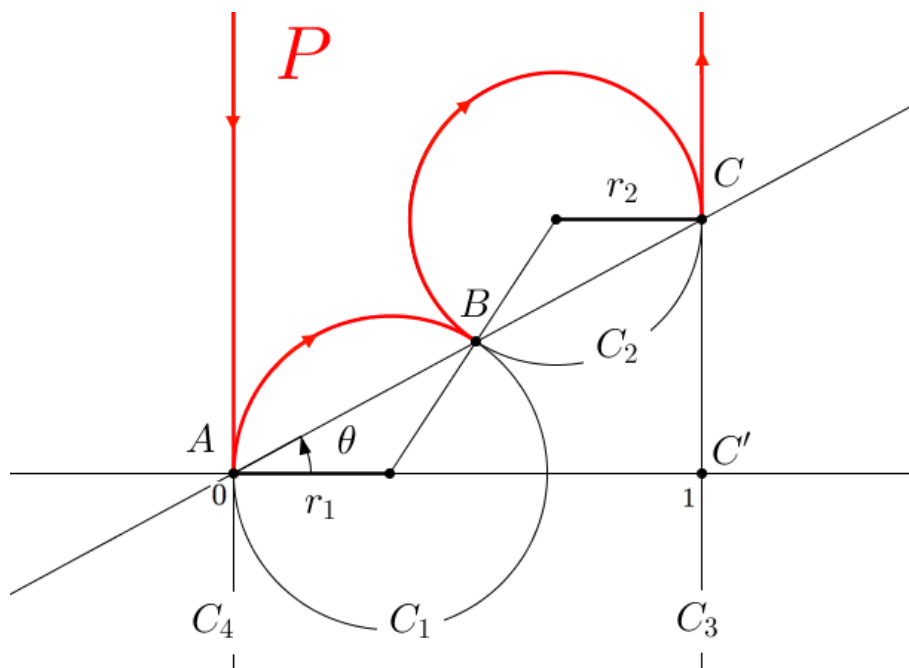


図 1.4: 鉛直系への正規化

補題 1.2.1. 任意の 4 円边形 $(P; A, B, C, D)$ に対して, $(P; A, B, C, D) \sim (P'; 0, u + iv, 1 + i\frac{v}{u}, \infty)$ を満たす $0 < u < 1, v \in \mathbb{R}$ が存在する.

証明. $[(P)] \in M_4^{\text{mark}}$ の代表元として, $A = 0$ なる鉛直系 $(P; A, B, C, D)$ をとる. このとき, u, v を用いて $B = u + iv$ とすると, 理想性から 2 円 C_1, C_2 が唯一つ定まるので, 初等幾何を用いることで, $C = 1 + i\frac{v}{u}$ と定まる. \square

これにより, 次の補題が成り立つ.

補題 1.2.2. マーク付き 4 円边形 $(P; A, B, C, D)$ に対して, 4 頂点 A, B, C, D は同一円周上に存在する.

証明. $[P] \in \mathcal{M}_4^{\text{mark}}$ の代表元として, $A = 0$ なる鉛直系 $(P; A, B, C, D)$ をとる. 補題 1.2.1 より, $B = u + iv$ と決めると, $C = 1 + i\frac{v}{u}$ と定まった. 今, $A = 0$ なので, 3 頂点 A, B, C が同一直線上に存在するとわかる. このとき, 直線は無限遠点を通ることに注意する. これは, 4 頂点が同一円周上に存在することを意味している. \square

補題 1.2.1 より $0 < u < 1, v \in \mathbb{R}$ を鉛直系におけるパラメータと見なすことができるので, この u, v を 4 円辺形 (P) の鉛直系パラメータという. このとき, $(P; 0, u + iv, 1 + i\frac{v}{u}, \infty)$ が 4 円辺形であるための $u + iv$ の存在領域が $\mathcal{M}_4^{\text{mark}}$ のパラメータ空間の 1 つとなる.

定理 1.2.3. $(P; 0, u + iv, 1 + i\frac{v}{u}, \infty)$ が 4 円辺形であるための必要十分条件は u, v が

$$\begin{cases} 0 < u < 1 \\ v^2 < \frac{u^3}{1-u} \\ \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

を満たすことである (図 1.5).

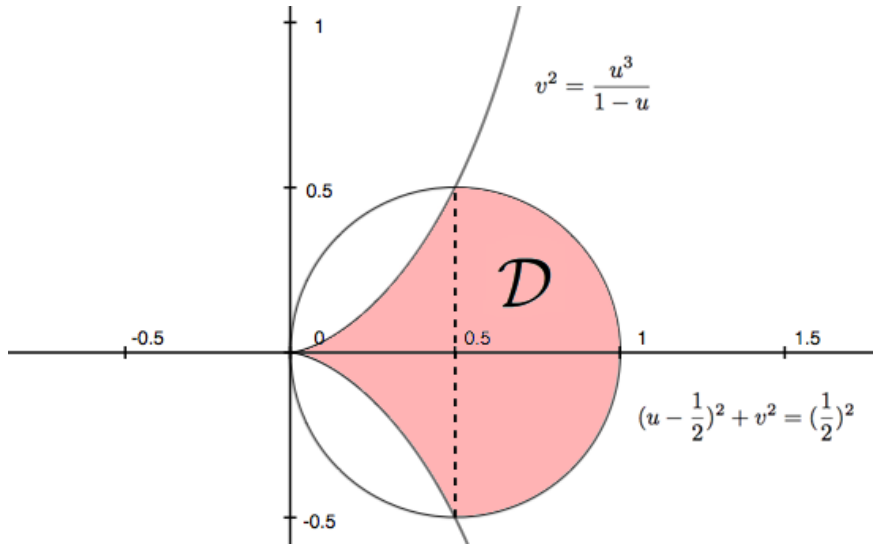


図 1.5: 鉛直系における $\mathcal{M}_4^{\text{mark}}$ のパラメータ空間

証明. はじめに, 図 1.4 右において, 円 C_1 の半径を r_1 , 中心を O_1 , 円 C_2 の半径を r_2 , 中心を O_2 とし, $\angle CAC' = \theta$ とする. このとき, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1B}$ なので

$$\begin{aligned} u + iv &= r_1 + r_1 \cos 2\theta + ir_1 \sin 2\theta \\ &= r_1(1 + \cos 2\theta) + ir_1 \sin 2\theta \end{aligned}$$

を得る. 従って

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{v}{\sin 2\theta} = \frac{v}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{u^2 + v^2}{2u} \end{aligned}$$

である.

また, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO_2} + \overrightarrow{O_2C}$ なので

$$\begin{aligned} 1 + i\frac{v}{u} &= u + iv + r_2 \cos 2\theta + ir_2 \sin 2\theta + r_2 \\ &= u + r_2(\cos 2\theta + 1) + i(v + r_2 \sin 2\theta) \end{aligned}$$

を得る. 従って

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1-u}{\cos 2\theta + 1} = \frac{1-u}{2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(1-u)(u^2 + v^2)}{2u^2} \end{aligned}$$

である.

一方, r_1, r_2 は $0 < r_1, r_2 < \frac{1}{2}$ を満たすので

$$\begin{cases} 0 < u^2 + v^2 < u \\ 0 < (1-u)(u^2 + v^2) < u^2 \end{cases}$$

となり, これを整理することで結果を得る. □

領域 \mathcal{D} は鉛直系における $\mathcal{M}_4^{\text{mark}}$ のパラメータ空間と見なせる. すなわち

$$F : \mathcal{M}_4^{\text{mark}} \longrightarrow \mathcal{D}$$

を満たす全単射写像 F が存在する.

次に, 鉛直系におけるマークの取り替え, すなわち $(P; A, B, C, D)$ の鉛直系パラメータと $(P; B, C, D, A)$ の鉛直系パラメータの互換性について考える.

定理 1.2.4. $(P; A, B, C, D)$ の鉛直系パラメータ u, v に対して, $(P; B, C, D, A)$ の鉛直系パラメータ u', v' は

$$\begin{cases} u' &= 1 - u \\ v' &= -\frac{1-u}{u}v \end{cases}$$

と表せる.

証明. $A = 0$ なる鉛直系 $(P; A, B, C, D)$ から $B = 0$ なる鉛直系への変換を $\varphi \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ とする. これを求めるために, 初めに

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z - B}{z - A} \\ &= \frac{z - (u + iv)}{z} \end{aligned}$$

を考える. このとき, $f_1(A) = \infty$, $f_1(B) = 0$, $f_1(C) = 1 - u$, $f_1(D) = 1$ である. ここで, $f_1(i)$ を求めると

$$\begin{aligned} f_1(i) &= \frac{i - u - iv}{i} \\ &= 1 + (u + iv) \cdot i \end{aligned}$$

であり, これは点 B を $\frac{\pi}{2}$ 回転させ, 1 平行移動させた点である.

今, 直線 $f_1(C_1)$ と $f_1(C_4)$ が鉛直方向から $\arg \frac{u+iv}{\sqrt{u^2+v^2}}$ 傾いているので

$$\begin{aligned} f_2(z) &= f_1(z) \cdot \frac{1}{\frac{u+iv}{\sqrt{u^2+v^2}}} \\ &= \frac{z - (u + iv)}{z} \cdot \frac{u - iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{aligned}$$

とすれば $f_2(C_1)$ と $f_2(C_4)$ は鉛直となる.

さらに

$$\begin{aligned} f_2(D) &= 1 \cdot \frac{u - iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ &= \frac{u - iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{aligned}$$

から $f_2(D)$ の実部が $\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$ とわかるので

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= f_2(z) \cdot \frac{1}{\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}} \\ &= \frac{z - (u + iv)}{z} \cdot \frac{u - iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cdot \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u} \\ &= \frac{z - (u + iv)}{z} \cdot \frac{u - iv}{u} \end{aligned}$$

とすれば $\varphi(D)$ の実部は 1 となる. 従って, これが求める変換 φ の式である. $u + iv = \varphi(1 + i\frac{v}{u})$ なので, これを求めれば結果を得る. \square

この結果から, 4 円辺形のパラメータについて次の定義が出来る.

定理 1.2.5. 4 円辺形のパラメータは 2 種類のみである. すなわち

$$\begin{aligned} [(P; A, B, C, D)] &= [(P; C, D, A, B)] \\ [(P; B, C, D, A)] &= [(P; D, A, B, C)] \end{aligned}$$

である.

証明. $\Phi(u + iv) = u' + iv'$ とすると

$$\begin{aligned}\Phi^2(u + iv) &= \Phi\left(1 - u + i\frac{(u-1)v}{u}\right) \\ &= 1 - (1 - u) + i\frac{(1 - u - 1)\frac{(u-1)v}{u}}{1 - u} \\ &= u + iv\end{aligned}$$

となる. これは, 4 円形のパラメータ表示が 2 種類のみであることを意味している. \square

よって, $v > 0$ のとき $v' < 0$ なので図 1.5 の \mathcal{D} と上半平面の共通部分を \mathcal{M}_4 のパラメータ空間と見なしてよい.

1.3 同心系への正規化

2つ目の正規化として、向かい合う2円のうち1組が同心円状になるような正規化を考えたい。はじめに、互いに交わらない2円に対して次のような定理を述べる。

定理 1.3.1. 互いに交わらない2円 C_1, C_2 に対して、2円を同心円状に写す1次分数変換が存在する。さらに、2円 C_1, C_2 に直交する円はすべて2定点を通る。

証明. 円 C_2 上の点を無限遠点 ∞ に写す変換 $f \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ による像を考えると、 C_1, C_2 はそれぞれ図 1.6 左のように円と直線に写る。このとき、図のような2円 $f(C_1), f(C_2)$ に直交する2つの円 l_1, l_2 を考えることができる。円 $f(C_1)$ と l_1 との交点の一つを A 、直交円 l_1, l_2 の2交点を E, F とし、 $A \mapsto 1, E \mapsto 0, F \mapsto \infty$ なる変換 $g \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ による像を考えると、原点中心の $f(C_1)$ が内側、 $f(C_2)$ が外側の同心円状の図形に写る。このとき、直交円 l_1, l_2 は原点を通る直線に写ることに注意する。

さらに、2円 $gf(C_1)$ と $gf(C_2)$ に直交する円はすべて原点を通る直線である。これらすべての直線は無限遠点を通るので、 $f^{-1}(E), f^{-1}(F)$ が求める2定点である。 \square

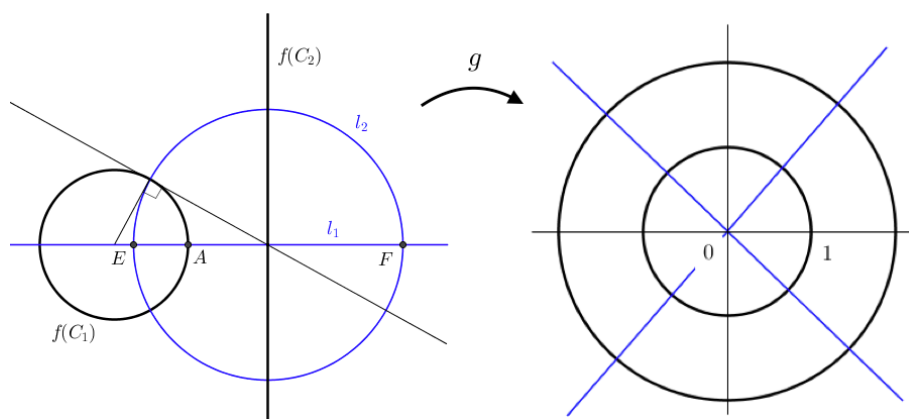


図 1.6: 同心円状に写す変換の存在

1.2 節と同様に4円多角形 $(P; A, B, C, D)$ に対して、次のような正規化を考える。

(P) の辺をなす円のうち C_2, C_4 について、定理 1.3.1 を適用する。この2定点を図 1.7 左のように E, F とし、 $A \mapsto 1, E \mapsto 0, F \mapsto \infty$ なる変換の像を考える。この変換により円 C_4 は原点中心、半径1の円に写り、円 C_2 は原点中心、半径が1より大きい円に写る。また、理想性から円 C_1 は $z = 1$ を通る円に写る。さらに、円 C_2 の像の半径と、頂点 C の像のなす角を決めると、頂点 D の像が唯一つ定まる。このように同心円状に正規化された4円多角形を同心系という。

補題 1.3.2. 任意の4円多角形 $(P; A, B, C, D)$ に対して、 $(P; A, B, C, D) \sim (P'; 1, r, re^{i\theta}, e^{i\theta})$ を満たす $r > 1, 0 < \theta < 2\pi$ が存在する。

証明. $[(P)] \in \mathcal{M}_4^{\text{mark}}$ の代表元として、 $A = 1$ なる同心系 $(P; A, B, C, D)$ をとる。このとき、 r, θ を用いて $C = re^{i\theta}$ とすると、円 C_2 の半径が r と定まる。すなわち、 $B = r$ となる。

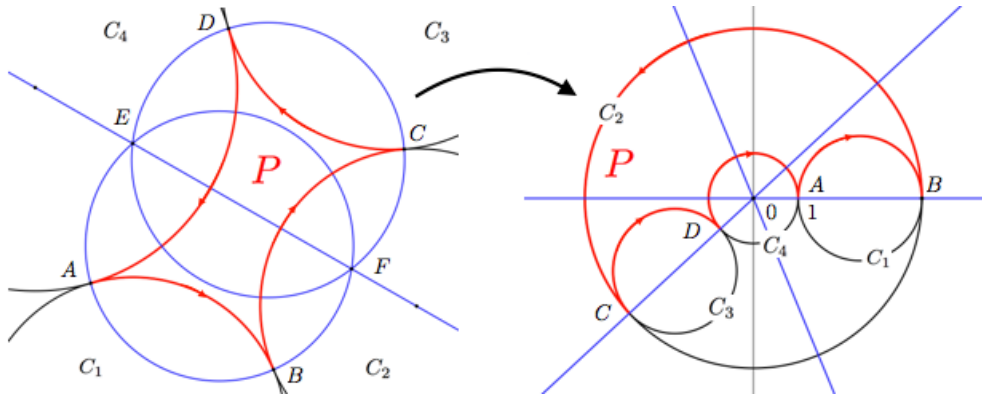


図 1.7: 同心系への正規化

また, 理想性から頂点 C で円 C_2 と接し, C_4 とも接する円 C_3 は唯 1 つ定まるので, $D = e^{i\theta}$ と定まる. \square

補題 1.3.2 より $r > 1, 0 < \theta < 2\pi$ を同心系におけるパラメータと見なすことができるので, この r, θ を 4 円辺形 (P) の同心系パラメータという. このとき, $(P; 1, r, re^{i\theta}, e^{i\theta})$ が 4 円辺形であるための $re^{i\theta}$ の存在領域が $\mathcal{M}_4^{\text{mark}}$ のパラメータ空間の 1 つとなる.

定理 1.3.3. $(P; 1, r, re^{i\theta}, e^{i\theta})$ が 4 円辺形であるための必要十分条件は r, θ が

$$\begin{cases} r > 1 \\ \cos^{-1} \frac{8 - (r-3)^2}{(r+1)^2} < \theta < 2\pi - \cos^{-1} \frac{8 - (r-3)^2}{(r+1)^2} \end{cases}$$

を満たすことである (図 1.8).

証明. 4 円辺形であるための条件として円 C_1 と円 C_3 が交わらなければよいので, 図 1.8 の 3 角形に余弦定理を適用すると

$$\left(\frac{r-1}{2} + \frac{r-1}{2}\right)^2 < \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{r+1}{2}\right)\left(\frac{r+1}{2}\right)\cos\theta$$

となる. これを整理することにより結果が得られる. \square

領域 \mathcal{E} は同心系における $\mathcal{M}_4^{\text{mark}}$ のパラメータ空間と見なせる. すなわち

$$G : \mathcal{M}_4^{\text{mark}} \rightarrow \mathcal{E}$$

を満たす全単射写像 G が存在する.

次に, 同心系におけるマークの取り替え, すなわち $(P; A, B, C, D)$ の同心系パラメータと $(P; B, C, D, A)$ の同心系パラメータの互換性について考える.

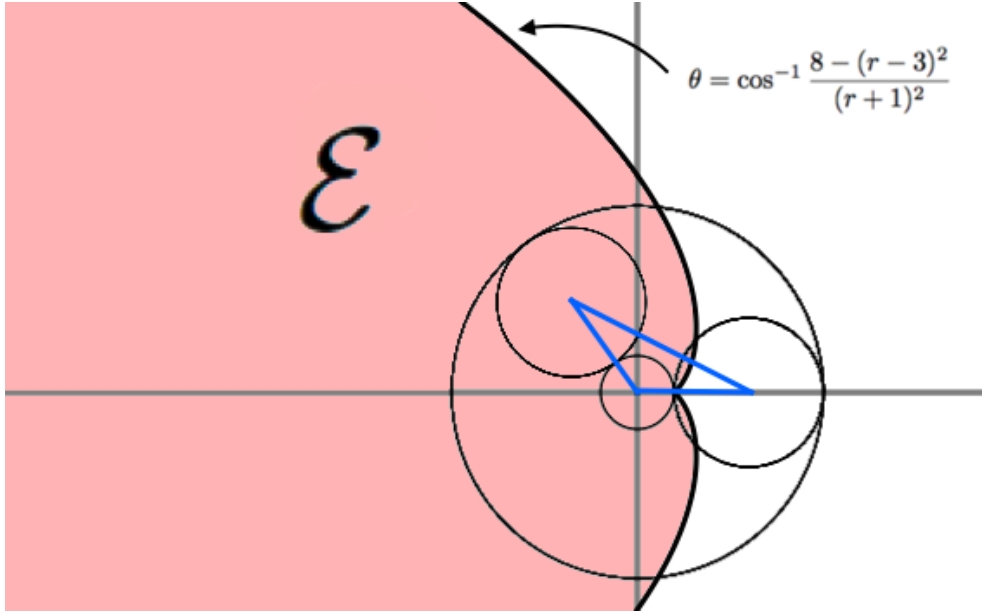


図 1.8: 同心系における M_4^{mark} のパラメータ空間

定理 1.3.4. $(P; A, B, C, D)$ の同心系パラメータ r, θ に対して, $(P; B, C, D, A)$ の同心系パラメータを r', θ' とすると r' は

$$r' = \left[\frac{(r+1) \sin \theta/2 + \sqrt{4r - (r+1)^2 \cos^2 \theta/2}}{r-1} \right]^2$$

と表され, θ' は

$$\begin{cases} \cos \theta' = \frac{(r^2 + 1) \cos^2 \theta/2 - 2r}{2r \sin^2 \theta/2} \\ \sin \theta' = -\frac{(r-1) \cos \theta/2 \sqrt{4r - (r+1)^2 \cos^2 \theta/2}}{2r \sin^2 \theta/2} \end{cases}$$

を満たすものである.

証明. はじめに, 円多角 P に対して, 3 円 C_i, C_j, C_k に直交する円を Q_{ijk} とする. 図 1.9 のように同心系 (P) において直交円 Q_{341} と Q_{123} との交点を E, F とする. $A = 1$ なる同心系 $(P; A, B, C, D)$ から $B = 1$ なる同心系への変換を $\psi \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ とすると, ψ は $B \mapsto 1, E \mapsto 0, F \mapsto \infty$ を満たす. この変換を具体的に求める.

点 E, F の座標を考える. 直線 EF は定理 1.3.1 より円 C_1, C_3 のそれぞれの中心を通り, 直交円 Q_{341}, Q_{123} のそれぞれの中心を通る直線と直交する. この交点を G とする. 2 円 C_1, C_3 の半径はともに $\frac{r+1}{2}$ なので, $|OG| = \frac{r+1}{2} \cos \theta/2$ である. 一方, 直交円 Q_{341}, Q_{123} はそれぞれ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y - \tan \theta/2)^2 = (\tan \theta/2)^2 \\ (x-r)^2 + (y - r \tan \theta/2)^2 = (r \tan \theta/2)^2 \end{cases}$$

である. この式を整理すると $x^2 + y^2 = r$ が得られる. これは $|OE| = |OF| = \sqrt{r}$ を表している. $|GE| = |GF| = \sqrt{r - (\frac{r+1}{2} \cos \theta/2)^2}$ である. $\vec{OE} = \vec{OG} + \vec{GE}$, $\vec{OF} = \vec{OG} + \vec{GF}$ より点 E, F は

$$\begin{aligned} E &= |OG| \cdot e^{i\theta/2} + |GE| \cdot e^{-i(\pi/2-\theta/2)} \\ F &= |OG| \cdot e^{i\theta/2} + |GF| \cdot e^{i(\pi/2+\theta/2)} \end{aligned}$$

と表せる. ここで, $\varphi = \tan^{-1} |GE|/|OG|$ とすると

$$E = \sqrt{r} e^{i(\theta/2-\varphi)}, \quad F = \sqrt{r} e^{i(\theta/2+\varphi)}$$

と書ける. 一方, 変換 ψ は定理 1.1.3 より

$$\psi(z) = \frac{z-E}{z-F} \cdot \frac{r-F}{r-E}$$

と求められる. ここで, $r' = \psi(re^{i\theta})$, $\theta' = \arg \psi(1)$ なので, それぞれを求めると結果を得る. □

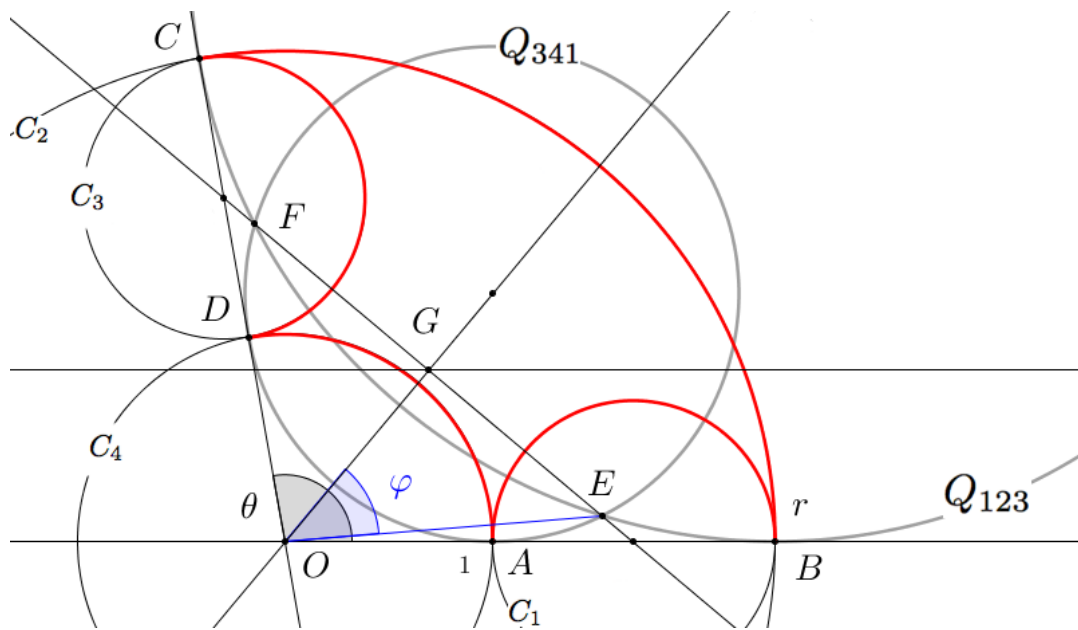


図 1.9:

1.4 鉛直系と同心系の互換性

この節では、鉛直系パラメータと同心系パラメータの互換性について考える。

定理 1.4.1. $(P; A, B, C, D)$ の鉛直系パラメータを u, v に対して、同心系パラメータを r, θ とすると、 r は

$$r = \frac{(1-u)(u^2+v^2)}{\left(u - \sqrt{u^3 - (1-u)v^2}\right)^2}$$

と表され、 θ は

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-u^3 + (2-u)v^2}{u(u^2+v^2)} \\ \sin \theta = -\frac{2v\sqrt{u^3 - (1-u)v^2}}{u(u^2+v^2)} \end{cases}$$

を満たすものである。

証明. $[(P)] \in M_4^{\text{mark}}$ の代表元として $A = 0$ なる鉛直系 $(P; A, B, C, D)$ をとる. また, 図 1.10 のように直交円 Q_{412} と直交円 Q_{234} との交点を E, F とする. この鉛直系から $A = 1$ なる同心系への変換, すなわち $A \mapsto 1, E \mapsto 0, F \mapsto \infty$ なる変換 $\psi \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ を考える.

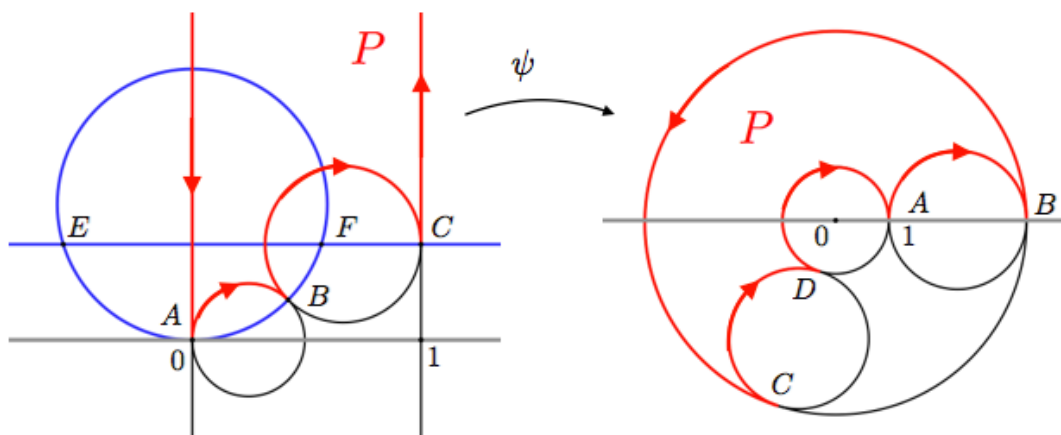


図 1.10: 鉛直系から同心系への変換

まず、鉛直系 (P) はパラメータ u, v を用いて $(P; 0, u + iv, 1 + i\frac{v}{u}, \infty)$ と表せるので、2点 E, F の座標は

$$E = -\frac{\sqrt{u^3 - (1-u)v^2}}{u} + i\frac{v}{u}$$

$$F = \frac{\sqrt{u^3 - (1-u)v^2}}{u} + i\frac{v}{u}$$

と求めることができる. 定理 1.1.3 より、変換 ψ を求めると

$$\psi(z) = \frac{uz + \sqrt{u^3 - (1-u)v^2} - iv}{uz - \sqrt{u^3 - (1-u)v^2} - iv} \cdot \frac{\sqrt{u^3 - (1-u)v^2} + iv}{-\sqrt{u^3 - (1-u)v^2} + iv}$$

となる. $r = \psi(u + iv)$, $\theta = \arg \psi(\infty)$ なので、それぞれを求めると結果を得る. \square

定理 1.10 の結果から, $v \geq 0$ のとき, $\pi \leq \theta < 2\pi$ であり, $v < 0$ のとき, $0 < \theta < \pi$ なので, 図 1.5 の \mathcal{D} と上半平面の共通部分を鉛直系における \mathcal{M}_4 のパラメータ空間と見なすとき, 図 1.8 の \mathcal{E} と下半平面の共通部分を同心系における \mathcal{M}_4 のパラメータ空間と見なしてよい.

定理 1.4.2. $(P; A, B, C, D)$ の同心系パラメータを r, θ , 鉛直系パラメータを u, v としたとき, u, v は r, θ を用いて

$$\begin{cases} u = \frac{(r-1)^2}{r^2 + 1 - 2r \cos \theta} \\ v = -\frac{(r-1)^3 \cot \theta/2}{(r+1)(r^2 + 1 - 2r \cos \theta)} \end{cases}$$

と表せる.

証明. $[(P)] \in \mathcal{M}_4^{\text{mark}}$ の代表元として $A = 1$ なる同心系 $(P; A, B, C, D)$ をとる. この同心系から $A = 0$ なる鉛直系への変換, すなわち $A \mapsto 0, D \mapsto \infty, C_3 \mapsto \{z \in \hat{\mathbb{C}}; \operatorname{Re} z = 1\}$ なる変換 $\varphi \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ を考える. 1.2 節と同じ手順で変換 φ を求めると

$$\varphi(z) = \frac{z-1}{z-e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta/2} \cdot \left(-\frac{r-1}{(r+1)\sin \theta/2} \right)$$

となる. $u + iv = \varphi(r)$ なので, これを求めると結果を得る. \square

図 1.11 は同心系のパラメータ r, θ のそれぞれを固定したときの曲線群である. 赤線は θ を固定したときの曲線群, 青線は r を固定したときの曲線群である.

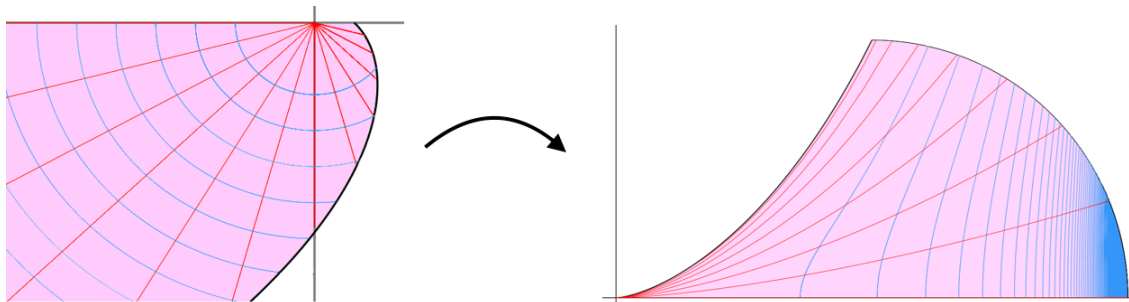


図 1.11: 同心系から鉛直系への変換における曲線群

1.5 4円形と対4円形

定義 1.1.5 (1) より, 4つの円に対して, 実際には4円形は同時に2つの領域が定義される. そこで, 任意の4円形 P に対して, もう一方の4円形 Q を対4円形という.

はじめに, 鉛直系における対4円形のパラメータ表示, すなわち $(P; A, B, C, D)$ の鉛直系パラメータと対4円形 (Q) の鉛直系パラメータについて考える.

定理 1.5.1. $(P; A, B, C, D)$ の鉛直系パラメータ u, v に対して, 対4円形 $(Q; C, B, A, D)$ の鉛直系パラメータ \bar{u}, \bar{v} は

$$\begin{cases} \bar{u} = 1 - u \\ \bar{v} = \frac{1 - u}{u}v \end{cases}$$

と表せる.

証明. 対4円形 $(Q; C, B, A, D)$ に対して, $(Q; C, B, A, D)$ から $C = 0$ なる鉛直系への変換を $\sigma \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ とする. このとき, σ は頂点 A, C の中点を中心に π だけ回転させる変換なので

$$\sigma(z) = -z + 1 + i\frac{v}{u}$$

と求められる. このとき, $\bar{u} + i\bar{v} = \sigma(u + iv)$ を求めると結果を得る. \square

また, $(Q; B, A, D, C)$ の鉛直系パラメータについては 定理 1.2.4 のマークの取り替えを適用することにより得られる.

次に, 同心系における対4円形のパラメータ表示, すなわち $(P; A, B, C, D)$ の同心系パラメータと対4円形 (Q) の同心系パラメータについて考える.

定理 1.5.2. $(P; A, B, C, D)$ の同心系パラメータ r, θ に対して, 対4円形 $(Q; D, C, B, A)$ のパラメータ $\bar{r}, \bar{\theta}$ は

$$\begin{cases} \bar{r} = r \\ \bar{\theta} = 2\pi - \theta \end{cases}$$

と表せる.

証明. 対4円形を $(Q; D, C, B, A)$ に対して, $(Q; D, C, B, A)$ から $D = 1$ なる同心系への変換を $\tau \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ とする. このとき, τ は原点中心に $2\pi - \theta$ だけ回転させる変換なので

$$\tau(z) = e^{i(2\pi - \theta)}z$$

と求められる. $\bar{r}e^{i\bar{\theta}}$ を求めると結果を得る. \square

また, $(Q; C, B, A, D)$ の同心系パラメータについては 定理 1.3.4 のマークの取り替えを考えることにより得られる.

1.6 極限集合

次の操作を考えていく. 任意の 4 円多角形 P に対して, 4 円 C_i に関する鏡映変換を $f_i \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ とする. さらに, f_1, \dots, f_4 が生成する群を $\Gamma = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ とする. ただし, 積は変換の合成で定義する.

このとき, $f_1P, f_2(f_1P \cup P), \dots$ は図 1.12 のように写る. $\gamma \in \Gamma$ に対して, γP の和集合をとることを考える.

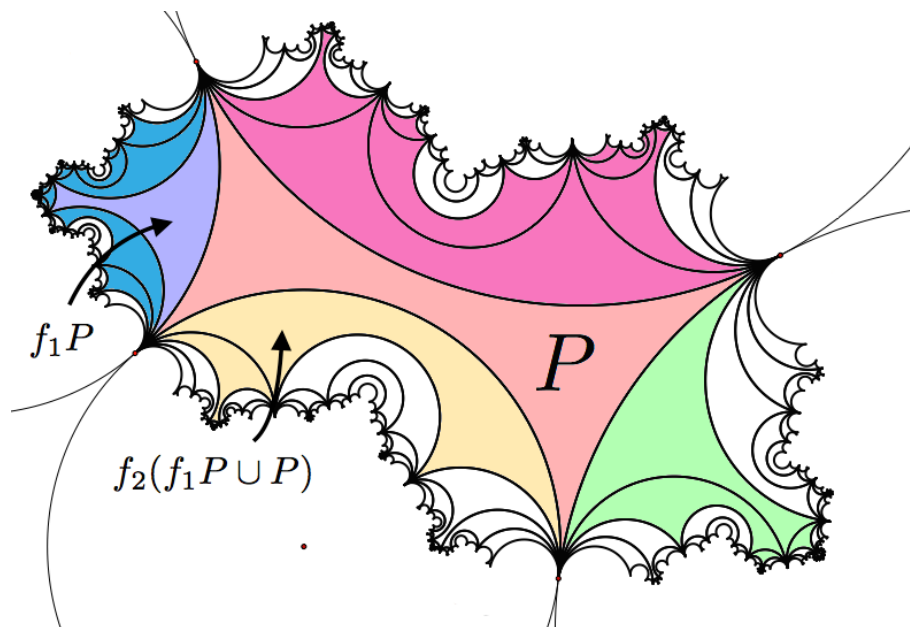


図 1.12: $\gamma \in \Gamma$ による領域の拡張

定義 1.6.1. 以上の操作から得られた領域を

$$\Omega(P) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma P$$

と表し

$$\Lambda(\Gamma) = \partial(\Omega(P))$$

を 4 円多角形 P に関する極限集合とする.

はじめに, 極限集合が円となるような特別な場合について考える. 以下の定理は, クライン群論でよく知られたものである.

定理 1.6.2. 4 頂点を通る円と各辺が直交するような 4 円多角形 P_0 に対して, この 4 頂点を通る円 Q_0 と P_0 の極限集合は一致する.

証明. ここでは, P_0 の極限集合が Q_0 に含まれることを示す. はじめに, 補題 1.2.2 より任意の 4 円多角形の 4 頂点は同一円周上に存在することに注意する. この円 Q_0 と各辺が直交

する 4 円辺形 $(P_0; A_0, B_0, C_0, D_0)$ をとる (図 1.13 左). さらに, (P_0) を $A_0 \mapsto 0$ なる鉛直系に写す変換を $\varphi \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ とする. このとき, 図 1.13 右のように円 Q_0 は実軸に写り, 3 頂点 A_0, B_0, C_0 は実軸上に写る.

また, $\varphi(C_i)$ に関する鏡映変換を $g_i \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ し, これらが生成する群を Γ とする. このとき, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して, $\gamma A_0, \gamma B_0, \gamma C_0$ はすべて実軸上に存在する. 従って, 極限集合は円 Q_0 は一致する. \square

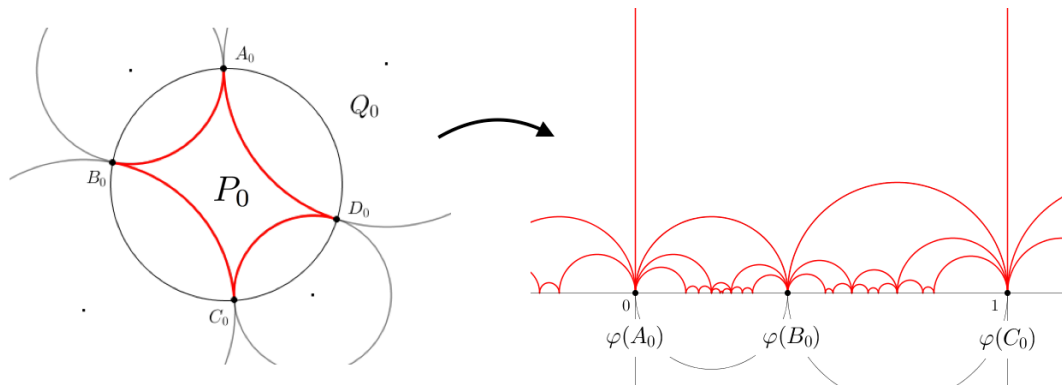


図 1.13: 極限集合の特別な場合

定義 1.6.3. 直交 4 円辺形

定理 1.6.2 で取り上げた 4 円辺形を直交 4 円辺形という.

ここで考えた極限集合は図 1.14 (i) の特別な場合であり, 一般には図 1.14 (ii) のような極限集合が得られる. 次節で, ある変形を導入して, 一般的な極限集合について考える.

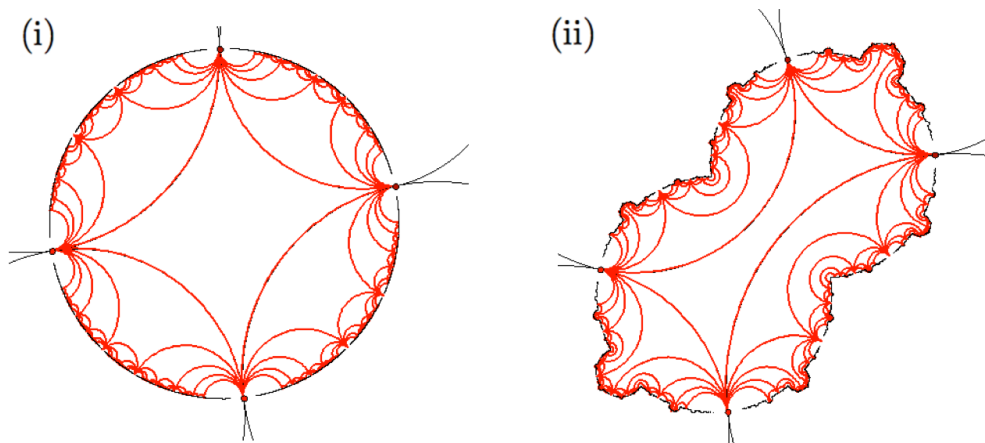


図 1.14: 4 円辺形に関する極限集合

1.7 レンズ

本節では、2次元円盤に対してレンズの挟み込みによる変形を導入する。次のような状況を考える。

2次元円盤 D に対して、 ∂D に直交する円盤 D 上の弧を L とする。このとき、 $D - L$ は2つの連結成分をもつので、それぞれを D_1, D_2 とする。また、弧 L の2端点を p_1, p_2 とし、 $p_1 \mapsto 0, p_2 \mapsto \infty, L \mapsto \{z; \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ なる変換を $\psi \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ 、原点中心に θ だけ回転させる変換を $g_\theta \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ とする。

$\psi(D_1)$ は第一象限、 $\psi(D_2)$ は第二象限となる。変換 g_θ により $\psi(D_2)$ のみを θ だけ回転させ、逆変換 ψ^{-1} により $\psi(D_1) \cup g_\theta \psi(D_2)$ を写すと図 1.15 のように円盤 D を変形できる。

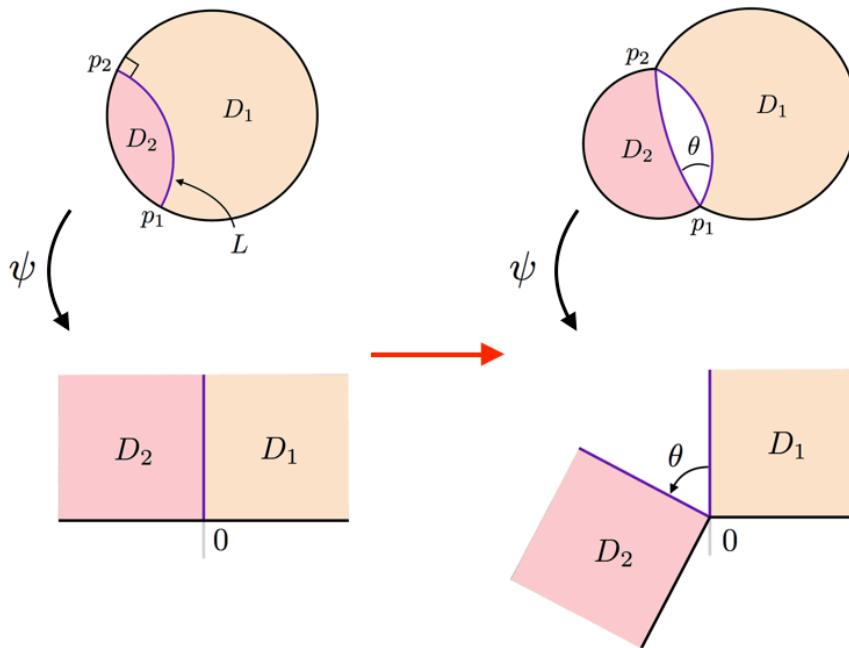


図 1.15: レンズの挟み込みによる変形

このとき、2弧 $L, \psi^{-1}g_\theta\psi(L)$ で囲まれるなす角 θ の領域を θ レンズということにする。また、この変形は円盤 D の弧 L の位置に1辺が L である θ レンズを挟み込んで変形したとすることができる。以上より、レンズの挟み込みによる変形を導入する。

この変形を利用することで、任意の4円辺形はある直交4円辺形のレンズの挟み込みであることがいえる(図 1.16)。これについて詳しく説明する。

任意の4円辺形 $(P; A, B, C, D)$ に対して、 $A \mapsto 1$ なる同心系への変換を $\psi \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ とする。このとき同心系パラメータ r, θ に対して、 $\pi \leq \theta < 2\pi$ と仮定する。もし、 $0 < \theta < \pi$ ならば、マークの取り替え、すなわち $(P; B_0, C_0, D_0, A_0)$ の同心系への変換を考えるとよい。

同心系におけるレンズは図 1.16 のような直交円 $\psi(Q_{412})$ に直交する原点 0 を端点にもつ上半平面上の半直線と $\psi(Q_{234})$ に直交する原点 0 を端点にもつ上半平面上の半直線で囲

まれる領域である. 従って, 4 円形 (P) にはなす角 $\theta - \pi$ のレンズが挟み込んでいると見なすことができる. さらに, 先ほどのレンズによる変形の逆を考えることで, 直交 4 円形を得られる (図 1.16).

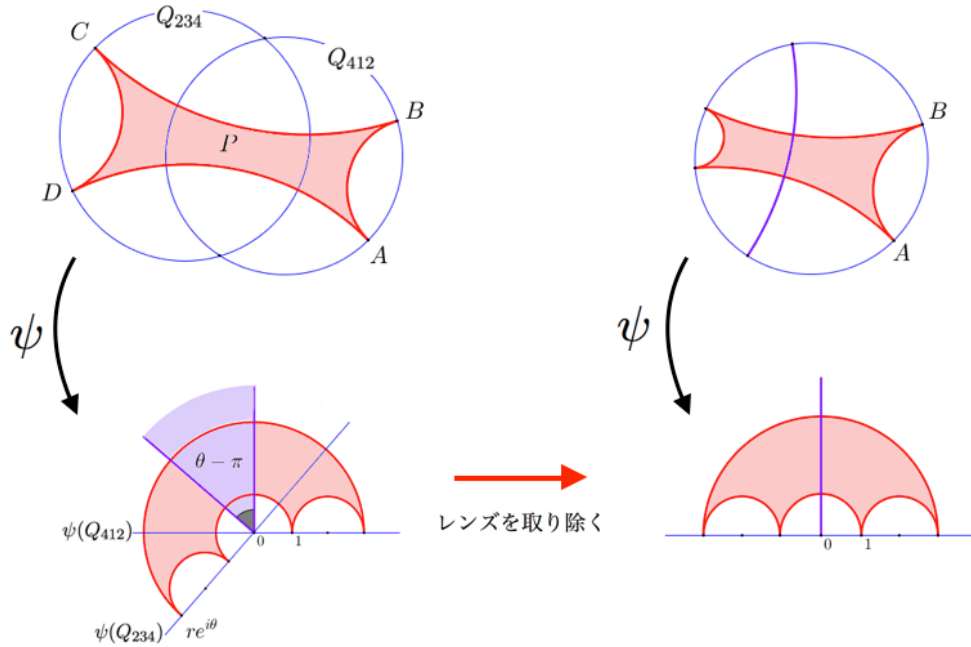


図 1.16: レンズと直交 4 円形の存在

この逆の変形, すなわち直交 4 円形にレンズを挟み込むことも考えることができる.

続いて, レンズを用いて極限集合について考えよう. 先の直交 4 円形 (P_0) の極限集合を Λ_0 , (P_θ) の極限集合を Λ_θ とする. P_0 のレンズの挟み込む位置を L とし, Λ_0 を境界とする内部の領域を Ω_0 とする. また, 円 C_i に関する鏡映変換を f_i とし, これらから生成される群を Γ とする.

はじめに, f_1 による像を考える. このとき, $f_1 P_0$ と $f_1 L$ は図 1.17 左のように写る. $f_1 L$ は 4 円形 $f_1 P_0$ のレンズの挟み込む位置となる. ただし, 挟み込むレンズは 1 辺が $f_1 L$ の θ レンズになることに注意する. このとき, P_0 と $f_1 P_0$ に θ レンズを挟み込むと図 1.17 右のように変形できる.

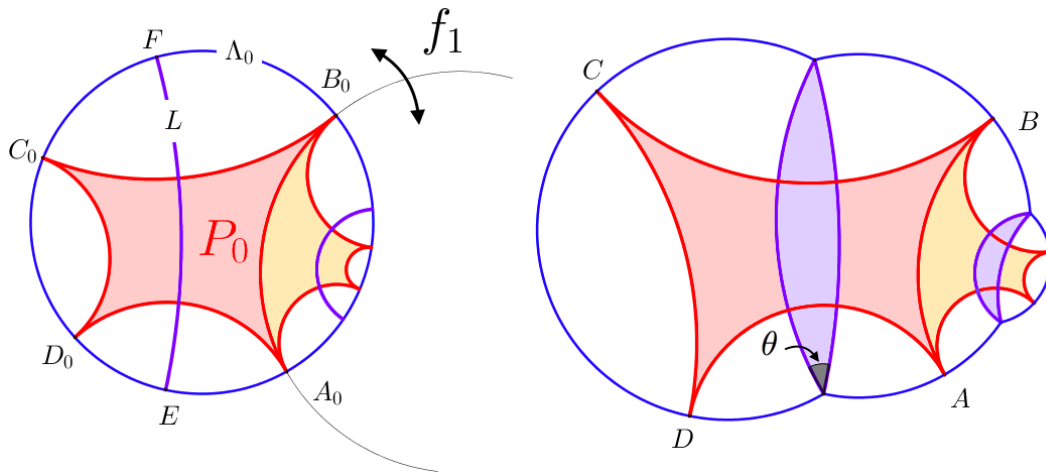


図 1.17: f_1 による像とレンズによる変換

以上の考察から, Ω_0 にレンズを挟み込むことを考えれば, Λ_θ が得られる. 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して, $\{\gamma L; \gamma \in \Gamma\}$ が円 Λ_0 と直交することから, γL が Ω_0 の θ レンズを挟み込むすべての位置になる. ただし, 挟み込むレンズは 1 辺が γL の θ レンズであることに注意する. 図 1.18 左は θ レンズを挟み込む位置を示している. このとき, すべての γL に θ レンズを挟み込み, 得られた領域の境界をとると, 図 1.18 右のように P_θ の極限集合 Λ_θ が得られる. このようにレンズを用いて極限集合の成り立ちを考察することができる.

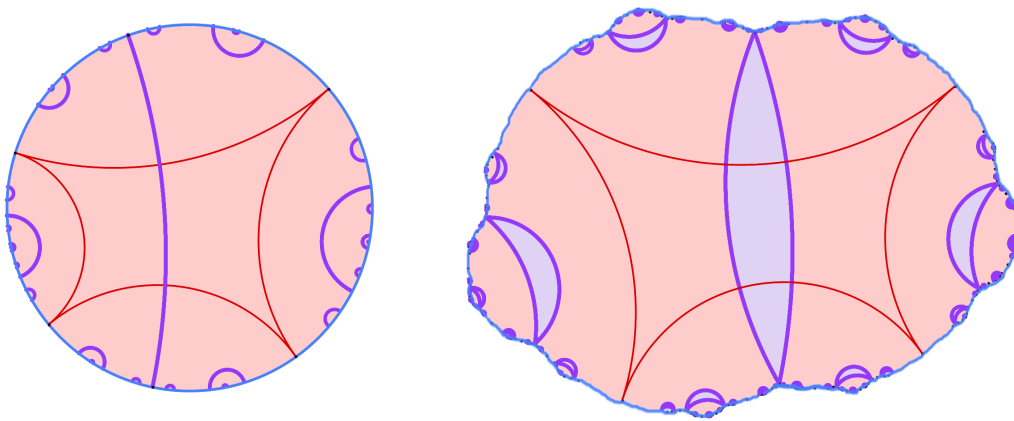


図 1.18: レンズによる極限集合の変形

第2章 球面体

2.1 準備

本章では, 前章と同様に以下に定めるメビウス変換を利用して, 3次元空間 \mathbb{R}^3 に無限遠点 ∞ を加えた空間 $\hat{\mathbb{R}}^3 := \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 上の球面体の変形空間について考えていきたい. その準備として, 以下の定義を与える.

定義 2.1.1. 平面と球面

(1) \mathbb{R}^3 上の球面と3次元球体

$a \in \mathbb{R}, r > 0$ に対して

$$S(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x - a| = r\}$$

と書ける集合 $S(a, r)$ を \mathbb{R}^3 上の球面という. さらに

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x - a| < r\}$$

と書ける集合 $B(a, r)$ を \mathbb{R}^3 上の3次元球体という.

(2) \mathbb{R}^3 上の平面

$b \in \mathbb{R}^3 - \{0\}, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(b, t) := \{x \in \mathbb{R}^3 ; (x, b) = t\}$$

と書ける集合 $P(b, t)$ を \mathbb{R}^3 上の平面という. ただし, $(,)$ は実内積を表している.

(3) $\hat{\mathbb{R}}^3$ 上の球面

\mathbb{R}^3 上の平面は ∞ を通る球面と見なすことができるので, \mathbb{R}^3 上の球面及び平面を $\hat{\mathbb{R}}^3$ 上の球面という. さらに, $\hat{\mathbb{R}}^3$ 上の球面を境界にもつ領域を $\hat{\mathbb{R}}^3$ 上の3次元球体という. 以下では, 特に区別しない限り単に球面, 球体という.

定義 2.1.2. 鏡映変換とメビウス変換

(1) 球面に関する鏡映変換

球面 $S(a, r)$ に対して

$$f_S(z) := a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a)$$

と書ける写像 f_S を球面に関する鏡映変換という. このとき, $f_S(\infty) = a, f_S^{-1}(\infty) = a$ とすることで写像 f_S は $\hat{\mathbb{R}}^3$ 全体で定義できる. さらに, $f_S = f_S^{-1}$ であることに注意する.

(2) 平面に関する鏡映変換

平面 $P(b, t)$ に対して

$$f_P(x) := x - \frac{2[(x \cdot b) - t]}{|b|^2} b$$

と書ける写像 f_P を平面に関する鏡映変換という. このとき, $f_P(\infty) = \infty$ とすることで写像 f_P は $\hat{\mathbb{R}}^3$ 全体で定義できる. さらに, $f_P = f_P^{-1}$ であることに注意する.

(3) メビウス変換

$\hat{\mathbb{R}}^3$ 上の球面に関する鏡映変換の有限個の合成からなる変換を $\hat{\mathbb{R}}^3$ におけるメビウス変換といい, その集合を $\text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ と表す. メビウス変換は鏡映変換のみならず, 平行移動, 拡大, 回転も表すことができ, 角度と球面を保つ.

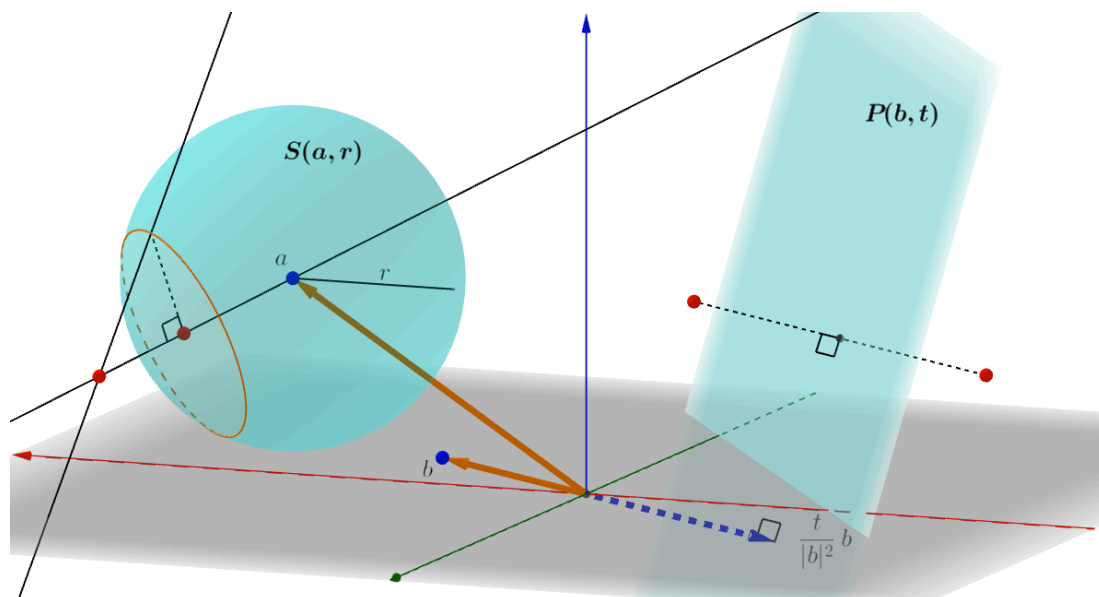


図 2.1: 球面, 平面に関する鏡映変換

これから考えていきたい球面体を次のように定義する.

定義 2.1.3. [3, Definition 2.1]

(1) 球面体

$\hat{\mathbb{R}}^3$ 上の 3 次元閉球体 B_1, \dots, B_n に対して, $\hat{\mathbb{R}}^3 - \bigcup_{i=1}^n B_i$ が 2 つの連結成分 P, P' をもち, それぞれが 3 次元開球体と同相であるとき, 成分 P または P' を球面体という. 以下では, 便宜上球面体は閉集合とする.

(2) 面・辺・頂点

$S_i := \partial B_i$ とし, 球面体 P に対して, $f_i := P \cap S_i$ を面という. また, $f_i \cap f_j$ が空でないとき, $e_{ij} := f_i \cap f_j$ を辺という. さらに, 3 つ以上の面が 1 点 v で交わるとき, v を頂点と

いう.

(3) 面角

辺 e_{ij} を共有する 2 面 f_i, f_j に対して, f_i, f_j に直交する平面を考える. この平面による断面上の 2 面 f_i, f_j のなす角を面角という.

(4) 有理性

各辺 e_{ij} に対して, 面角が π を割り切るとき, 球面体 P は有理的であるという. すなわち, 各 e_{ij} に対して, 整数 n_{ij} が存在して, e_{ij} での面角は π/n_{ij} で表される.

(5) 理想性

各頂点 v に対して, v で交わる辺のすべてが v で互いに接するとき, 球面体 P は理想的であるという. 以下では, 単に球面体と書くとき理想性は仮定されているものとする.

図 2.2 は $n = 5$ のときの球面体とその面, 辺, 頂点を示している.

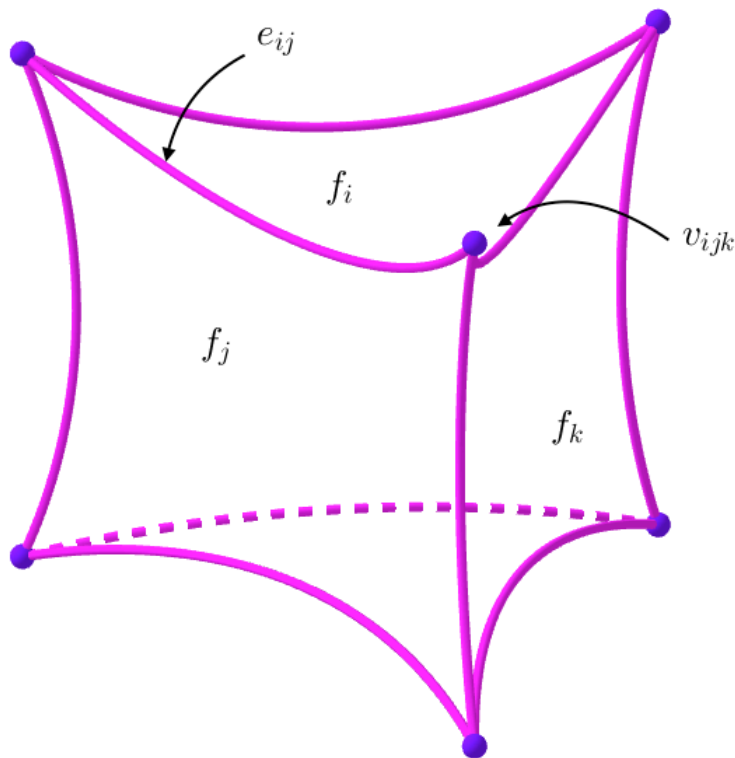


図 2.2: $n = 5$ の球面体の面, 辺, 頂点

本論文では, $n = 6$ の特別な場合として, 立方体と同じ面構造をもつ球面立方体, 中でも理想的かつ有理的である理想有理球面立方体について考える.

では、理想有理球面立方体 P を次のように定式化しよう。球面立方体 P の 6 面を図 2.3 左のようにしたとき、辺 e_{ij} の添字 (i, j) を考えると

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$$

である。この辺の添字の集合を E とする。今、球面立方体 P は有理性を満たすので、 $(i, j) \in E$ に対して、自然数 n_{ij} を用いて、辺 e_{ij} での面角 θ_{ij} を π/n_{ij} とする。また、頂点 v_{ijk} の添字 (i, j, k) を考えると

$$(1, 2, 3), (1, 4, 5), (3, 5, 6), (1, 2, 4), (4, 5, 6), (2, 3, 6), (2, 4, 6), (1, 3, 5)$$

である。この頂点の添字の集合を V とする。今、球面立方体 P は理想性を満たすので、任意の $(i, j, k) \in V$ に対して、3 辺 e_{ij}, e_{jk}, e_{ki} が頂点 v_{ijk} で互いに接している。また、頂点 v_{ijk} を以下では

$$\begin{aligned} A &= v_{123}, B = v_{145}, C = v_{356}, D = v_{124} \\ E &= v_{456}, F = v_{236}, G = v_{246}, H = v_{135} \end{aligned}$$

と表すことにする (図 2.3 右)。

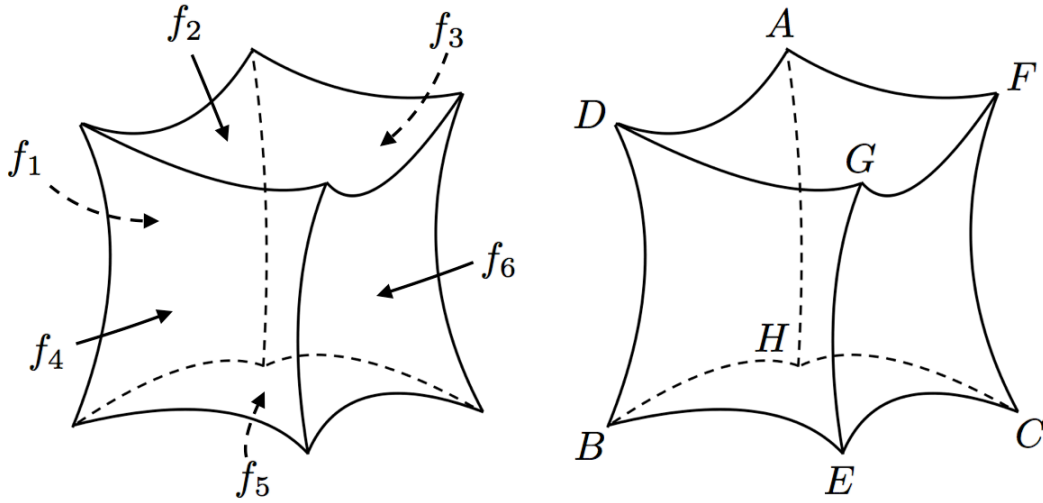


図 2.3: 理想有理球面立方体 P の辺と頂点

理想有理球面立方体に対して、この章の目標は次の定理を証明することである。

定理 2.1.4. 分類定理, [3, Theorem 2.2]

理想有理球面立方体の面角の組み合わせは 7 組であり、各面角の組み合わせに対して、その変形空間の次元はそれぞれ 2 である。

定理 2.1.4 を証明の最終的な結論は 2.4 節, 2.5 節で述べている。その準備として、まず次の補題を考える。

補題 2.1.5. [3, Lemma 3.2]

球面立方体 P の各面 f_i に対して, f_i 上の 4 頂点は同一円周上に存在する.

証明. 球面 S_i を平面に写す変換による像を考える. 今, 理想性から図 2.4 左のように球面立方体の 4 辺を構成する 4 円が球面 S_i 上に 4 頂点で隣接している. この変換により 4 円は隣接したままこの平面上に写る. 図 2.4 右は球面 S_i の像上の 4 円を示している. さらに, 補題 1.2.2 より 4 頂点が同一円周上に存在することがいえる. \square

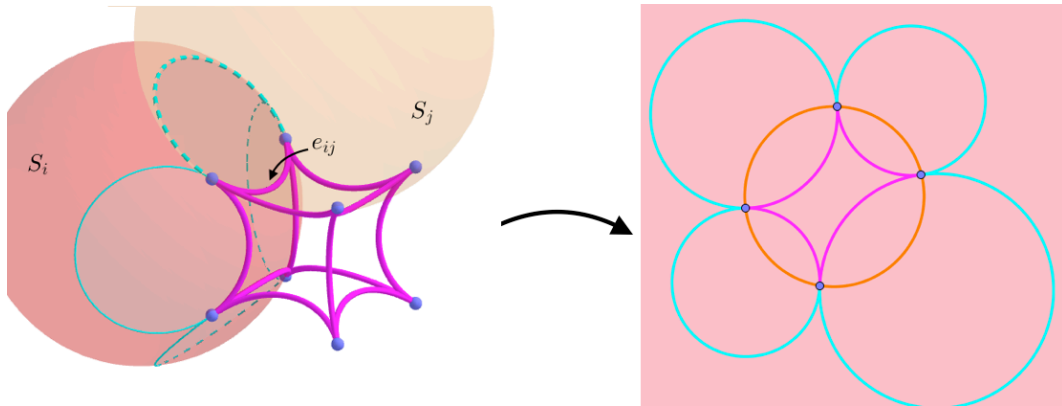


図 2.4:

補題 2.1.6. [3, Lemma 3.3]

球面立方体 P の 8 頂点は同一球面上に存在する.

証明. 頂点 H を無限遠点 ∞ に写す変換による像を考える. このとき, 補題 2.1.5 の結果から 3 頂点 A, D, B は変換により同一直線上に写る. 同様に, 3 頂点 A, F, C と 3 頂点 B, E, C もそれぞれ同一直線上に写る. さらに, 4 頂点 A, D, G, F も同一円周上に写るので, すべての頂点は同一平面上に写る (図 2.5 右). \square

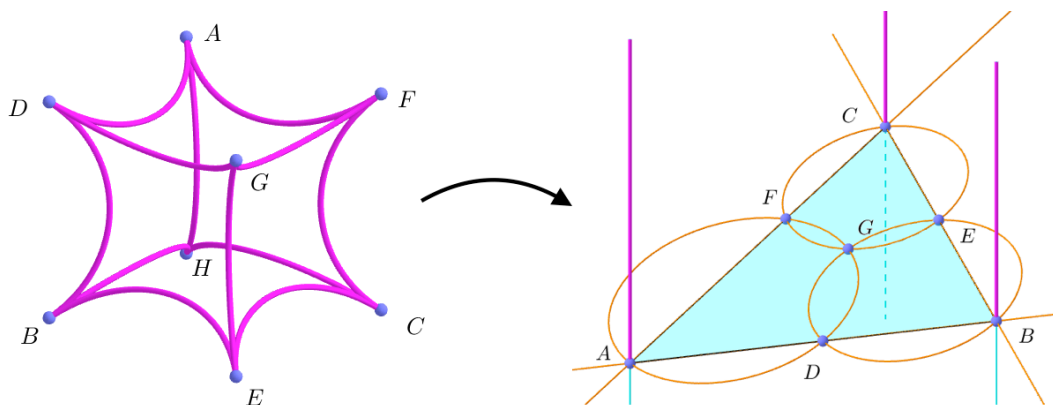


図 2.5:

補題 2.1.7. [3, Lemma 3.4]

理想有理球面立方体の各頂点における面角の総和は π である. すなわち, 各頂点 v_{ijk} に対して, $\pi/n_{ij} + \pi/n_{jk} + \pi/n_{ki} = \pi$ である.

証明. 1 頂点を無限遠点 ∞ に写す変換による像を考える. このとき, 図 2.5 右のようにこの頂点で接する 3 辺は 3 つの平行な直線に写る. この 3 角柱の断面を考えると, 面角の総和は π であることがわかる. \square

この結果から, 理想有理球面立方体の各頂点における面角の組み合わせは

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

の 3 組のみであることがわかる.

2.2 鉛直系への正規化

理想有理球面立方体の変形空間を考えるにあたり, 次のような同値関係 \approx を定める.

定義 2.2.1. 2つの球面立方体 P, P' に対して, 同値関係 \approx を次のように定める. すなわち, $P \approx P'$ であるとは, メビウス変換 $f \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ が存在して, $f(P) = P'$ を満たすときをいう. さらに, P の \approx による同値類を $[P]$ と表す.

この同値関係 \approx により球面立方体同士を互いに同一視することを考える. そこで, 次のような球面立方体の正規化を導入する.

$H = \infty$ とすると, 3辺 HA, HB, HC は互いに平行である. これらが xy 平面に直交していると仮定する. 頂点 A, \dots, G の座標をそれぞれ $(x_A, y_A, z_A), \dots, (x_G, y_G, z_G)$ とする. これらの xy 平面への射影を A', \dots, G' とする. さらに, $\triangle A'B'C'$ の外接円の中心を $(0, 0, 0)$, 半径を 1, $A = A' = (1, 0, 0)$ と仮定してよい. この正規化により S_1, S_3, S_5 は xy 平面に直交する平面, S_2, S_4, S_6 は球面となり, 図 2.6 のような球面立方体が得られる.

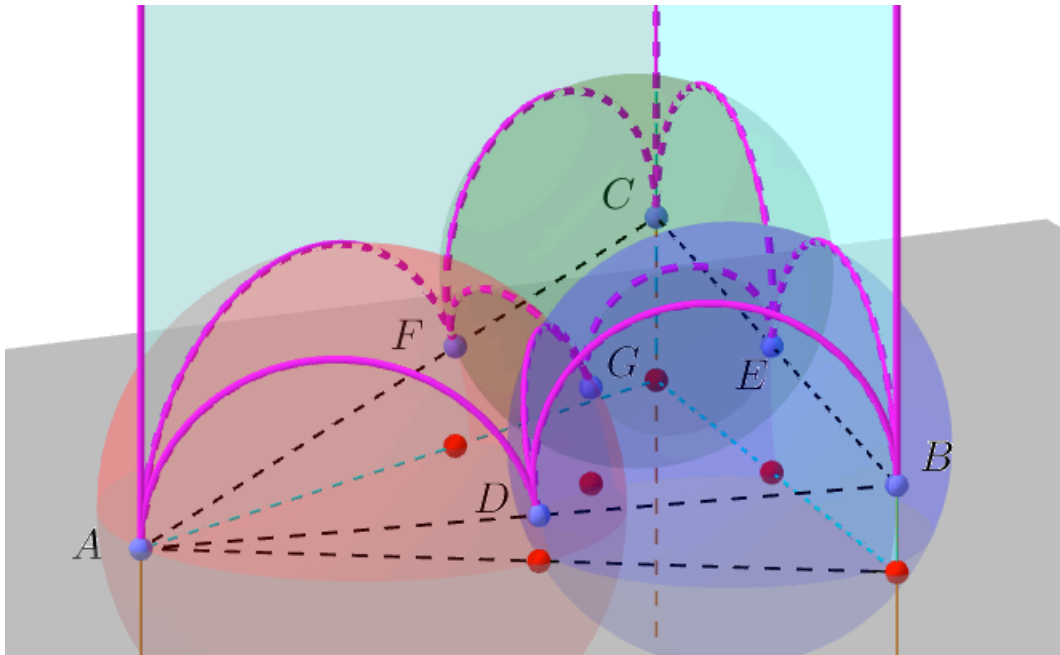


図 2.6: 球面立方体の正規化:鉛直系

この正規化は 1 頂点を無限遠点 ∞ としていることから, 第 1 章で取り上げた鉛直系に相当する. 従って, このような正規化により得られた球面立方体を鉛直系という. 以下では鉛直系に正規化した球面立方体で変形空間を考える.

今, $\angle C'A'B' = \theta_{13}$, $\angle A'B'C' = \theta_{15}$, $\angle B'C'A' = \theta_{35}$ であり, 補題 2.1.7 より $\{\theta_{13}, \theta_{15}, \theta_{35}\}$ は

$$\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}, \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right\}, \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$$

のいずれかであることを注意する. 面角の組み合わせを考えると, $\theta_{13}, \theta_{15}, \theta_{35}$ を入れ替えたものがいくつか存在する. そこで, 必要ならば無限遠点 ∞ を保つメビウス変換で頂点 A, B, C を入れ替えることで

$$(\theta_{13}, \theta_{15}, \theta_{35}) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

としてよい. このとき, $(\theta_{13}, \theta_{15}, \theta_{35})$ を固定したとき, 頂点 B', C' , 球面 S_1, S_3, S_5 は次の表のように座標, 式が得られる. さらに, 図 2.7 は各面角に対する 3 頂点 A', B', C' と 3 球面 S_1, S_3, S_5 の位置を示している.

$(\theta_{13}, \theta_{15}, \theta_{35})$	B'	C'	S_1	S_3	S_5
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	$x + \sqrt{3}y = 1$	$x - \sqrt{3}y = 1$	$x = -\frac{1}{2}$
$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	$\sqrt{3}x + y = \sqrt{3}$	$x - \sqrt{3}y = 1$	$\sqrt{3}x - y = 0$
$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$	$(0, 1, 0)$	$(0, -1, 0)$	$x + y = 1$	$x - y = 1$	$x = 0$

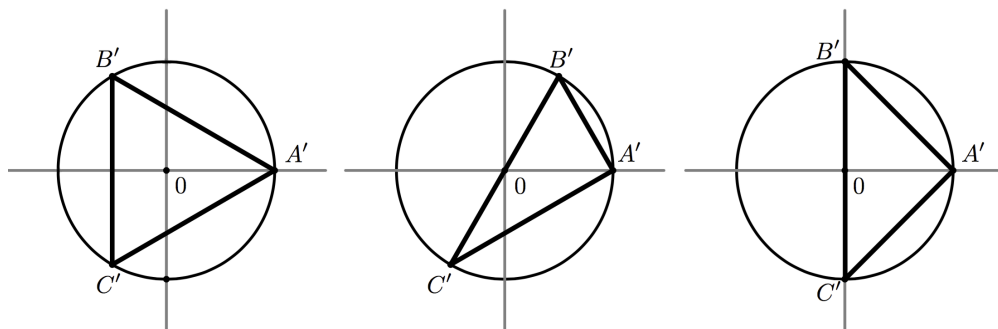


図 2.7:

さらに, 上表のように $(\theta_{13}, \theta_{15}, \theta_{35})$ を固定したとき, 次の補題を得ることができる.

補題 2.2.2. [3, Lemma 3.5]

面角の組み合わせを

$$(n_{ij}) = (n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{15}, n_{23}, n_{24}, n_{26}, n_{35}, n_{36}, n_{45}, n_{46}, n_{56})$$

とすると, 理想有理球面立方体のすべての面角は次の 11 組のうちの 1 組である.

- (a) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$, (g) $(6, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 6, 2, 6, 2, 3)$
- (b) $(2, 3, 3, 3, 6, 6, 2, 3, 3, 3, 3, 3)$, (h) $(3, 2, 6, 3, 6, 2, 3, 6, 2, 2, 6, 3)$
- (c) $(2, 3, 6, 3, 6, 3, 2, 3, 3, 2, 6, 3)$, (i) $(4, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 4, 4, 4, 4, 2)$
- (d) $(6, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 6, 3, 3, 6, 2)$, (j) $(4, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 4, 2, 4)$
- (e) $(3, 2, 2, 3, 6, 6, 2, 6, 3, 6, 3, 2)$, (k) $(6, 2, 2, 4, 3, 3, 6, 4, 2, 4, 2, 4)$
- (f) $(3, 2, 2, 3, 6, 6, 3, 6, 2, 6, 2, 3)$,

証明. 面角の組み合わせを考えるにあたり, 次のように球面立方体を簡略化した図 2.8 を用いる. はじめに, 4 つの面角 $n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{15}$ を決める. ただし, (n_{13}, n_{15}) は上表より

(3, 3), (2, 3), (2, 4) のいずれかとする. このとき, 補題 2.1.7 より 3 面角の総和は π なので, $n_{23}, n_{24}, n_{35}, n_{45}$ が一意に定まる. 次に, 残りの面角のうち例えば n_{26} を決めると, 残りの n_{36}, n_{46}, n_{56} が定まる. \square

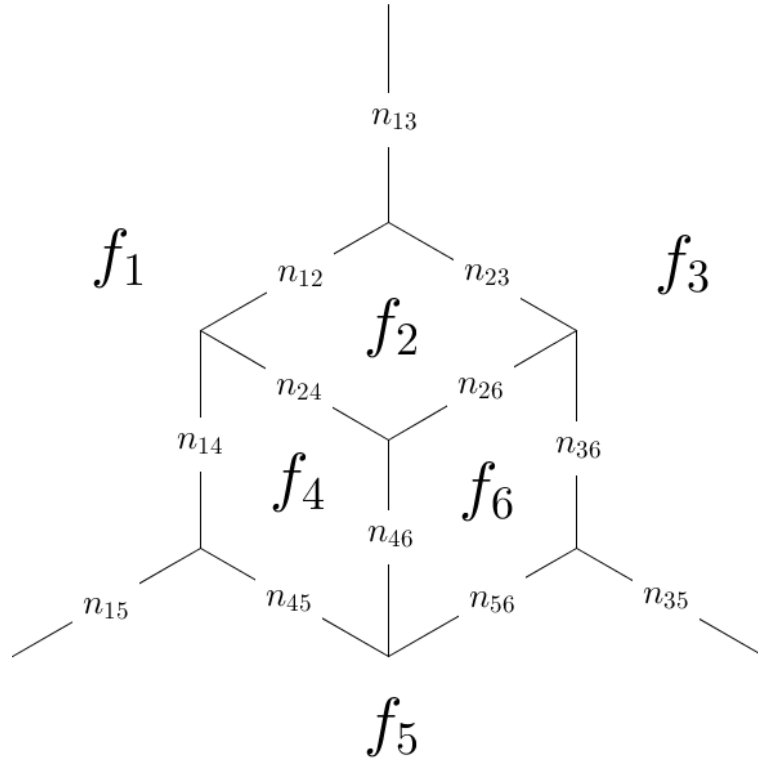


図 2.8:

実際には, P が球面立方体となるような面角の組み合わせ (n_{ij}) は補題 2.1.7 の 11 組のうち 7 組のみであり, $(f), (g), (j), (k)$ のとき, P は球面立方体にならない. 詳しくは 2.5 節で取り上げる.

次に, $i = 2, 4, 6$ に対して, 球面 S_i の中心を $O_i = (x_i, y_i, z_i)$, 半径を r_i とするとき, 半径 r_i について次の命題が成り立つ.

命題 2.2.3. [3, Proposition 3.6]

$$\begin{aligned} r_2 \sin \theta_{12} + r_4 \sin \theta_{14} &= \frac{|AB|^2}{2|A'B'|} \\ r_4 \sin \theta_{45} + r_6 \sin \theta_{56} &= \frac{|BC|^2}{2|B'C'|} \\ r_6 \sin \theta_{36} + r_2 \sin \theta_{23} &= \frac{|CA|^2}{2|C'A'|} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

証明. 図 2.9 において, 辺 $\widehat{AD} = e_{12}$ は半径 $r_2 \sin \theta_{12}$ の円の一部であり, 辺 $\widehat{DB} = e_{14}$ は半径 $r_4 \sin \theta_{14}$ の円の一部である. 2 鉛直線 HA, HB は図 2.9 のように, それぞれ A, B でこ

これらの弧に接している。このとき

$$|AD| = 2r_2 \sin \theta_{12} \cdot \frac{|A'B'|}{|AB|}$$

$$|DB| = 2r_4 \sin \theta_{14} \cdot \frac{|A'B'|}{|AB|}$$

である。 $|AD| + |DB| = |AB|$ なので、式 (2.2.1) の第 1 式を示せる。その他も同様に示される。 \square

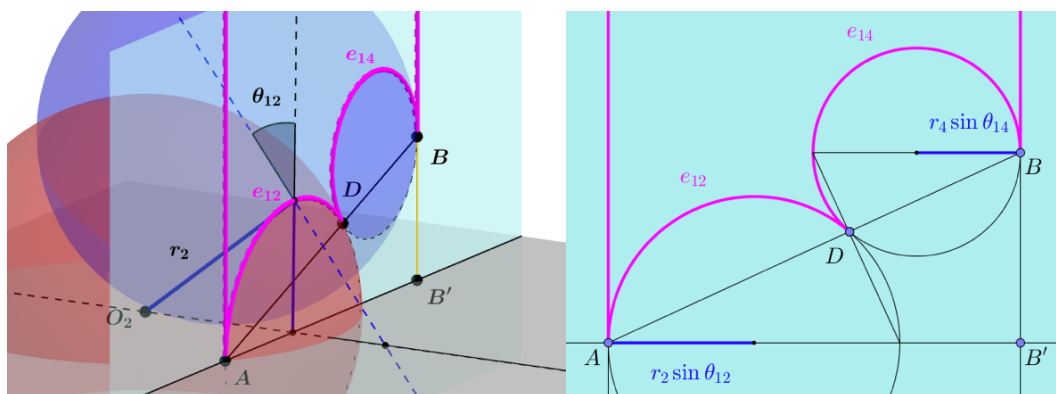


図 2.9:

式 (2.2.1) は

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_{12} & \sin \theta_{14} & 0 \\ 0 & \sin \theta_{45} & \sin \theta_{56} \\ \sin \theta_{23} & 0 & \sin \theta_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ r_4 \\ r_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |AB|^2 / (2|A'B'|) \\ |BC|^2 / (2|B'C'|) \\ |CA|^2 / (2|C'A'|) \end{pmatrix}$$

と書けるので、 r_2, r_4, r_6 の 1 次方程式と見なせる。このとき、係数行列の行列式

$$\begin{vmatrix} \sin \theta_{12} & \sin \theta_{14} & 0 \\ 0 & \sin \theta_{45} & \sin \theta_{56} \\ \sin \theta_{23} & 0 & \sin \theta_{36} \end{vmatrix} = \sin \theta_{12} \sin \theta_{45} \sin \theta_{36} + \sin \theta_{23} \sin \theta_{14} \sin \theta_{56}$$

は常に正なので、3 頂点 A, B, C を固定すると、常に式 (2.2.1) の解が存在する。しかし、一般には r_i は正とは限らない。従って、 r_2, r_4, r_6 のうち少なくとも 1 つが非正であれば、 P は球面立方体とならない。また、球面と向かい合う面が交わっても、 P は球面立方体とならないことにも注意する。

次に、 $i = 2, 4, 6$ に対して、球面 S_i の中心 O_i の xy 平面への射影を $O'_i = (x_i, y_i, 0)$ とする。このとき、以下の命題が成り立つ。

命題 2.2.4. [3, Proposition 3.7]

(1)

$$\begin{aligned}\angle O'_2 A' B' &= \frac{\pi}{2} - \theta_{12}, & \angle O'_2 A' C' &= \frac{\pi}{2} - \theta_{23} \\ \angle O'_4 B' C' &= \frac{\pi}{2} - \theta_{45}, & \angle O'_4 B' A' &= \frac{\pi}{2} - \theta_{14} \\ \angle O'_6 C' A' &= \frac{\pi}{2} - \theta_{36}, & \angle O'_6 C' B' &= \frac{\pi}{2} - \theta_{56}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}z_A = z_2 = 0, & \quad |A'O'_2| = |AO_2| = r_2 \\ z_B = z_4, & \quad |B'O'_4| = |BO_4| = r_4 \\ z_C = z_6, & \quad |C'O'_6| = |CO_6| = r_6\end{aligned}$$

証明.

(1) 平面 S_1 と球面 S_2 の面角は θ_{12} なので, 直線 $A'B'$ と中心 O'_2 , 半径 r_2 の円との角もまた θ_{12} である. 従って, $\angle O'_2 A' B' = \pi/2 - \theta_{12}$ である (図 2.10). 他も同様に示せる.

(2) 図 2.9 から辺 e_{12} は平面 S_1 と球面 S_2 の交線である. 今, 辺 e_{12} は A で鉛直線 AH に接しているので, 球面 S_2 の半径 AO_2 は AH に直交している. 従って, $z_A = z_2 = 0$, $|A'O'_2| = |AO_2|$ である. 他も同様に示せる. \square

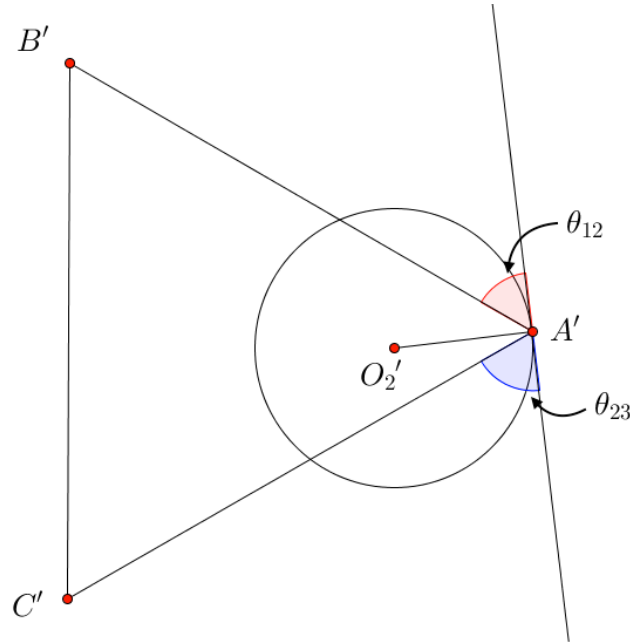


図 2.10:

以上より, 面角の組み合わせ (n_{ij}) を決めることで頂点 B', C' の座標が定まる. さらに, 式 (2.2.1) より球面 S_2, S_4, S_6 の半径 r_2, r_4, r_6 が定まる. ここで, r_2, r_4, r_6 を正と仮定し, 頂点 B, C の z 座標 z_B, z_C を決めることで, 命題 2.2.4 より球面 S_2, S_4, S_6 の中心 O_2, O_4, O_6 の座標が定まる. よって, 球面立方体をなす 6 つの球面が定まる.

2.3 逆の成立

前節のように、面角の組み合わせ (n_{ij}) とパラメータ (z_B, z_C) に対し、3 球面 S_2, S_4, S_6 の半径 r_2, r_4, r_6 が正ならば、中心 O_2, O_4, O_6 の座標が定まるので、球面立方体の 6 面が定まる。しかし、この球面立方体が有理性と理想性を満たしていることは自明ではない。そこで本節では、与えた球面立方体が有理性と理想性を満たすことを示す。

定理 2.3.1. [3, Theorem 3.8]

面角の組み合わせ (n_{ij}) を固定し、1 次方程式 (2.2.1) が正の解をもつと仮定する。このとき、平面 S_1, S_3, S_5 と球面 S_2, S_4, S_6 は次を満たしている。

- (1) S_2 と S_4, S_4 と S_6, S_6 と S_2 の面角はそれぞれ $\theta_{24}, \theta_{46}, \theta_{62}$ に等しい。
- (2) 2 球面 S_2, S_4 と平面 S_1 の共通部分は唯 1 点である。同様に、2 球面 S_4, S_6 と平面 S_5 の共通部分、2 球面 S_6, S_2 と平面 S_3 の共通部分についてもいえる。
- (3) 3 つの球面 S_2, S_4, S_6 の共通部分は唯 1 点である。
- (4) 6 球面 S_1, \dots, S_6 がなす球面立方体は有理性と理想性を満たす。

証明.

(1) 2 球面 S_2 と S_4 の面角を θ'_{24} とする。このとき、図 2.11 のように球面 S_2 と S_4 の交線上の点を L とするとき、3 角形 LO_2O_4 に余弦定理を適用することで

$$|O_2O_4|^2 = r_2^2 + r_4^2 - 2r_2r_4 \cos(\pi - \theta'_{24}) \quad (2.3.1)$$

が得られる。また、図 2.11 の $z = 0$ 上の 4 角形 $AB'O'_4O_2$ において、点 O_2 から線分 AB' に下ろした垂線と AB' との交点を M 、点 O'_4 から線分 AB' に下ろした垂線と AB' との交点を N 、点 O'_4 から線分 O_2M に下ろした垂線と O_2M の交点を R とする。このとき

$$\begin{aligned} |O_2O'_4|^2 &= |O'_4R|^2 + |O_2R|^2 \\ &= (|AB'| - |AM| - |B'N|)^2 + (|O_2M| - |O'_4N|)^2 \\ &= (|AB'| - r_2 \sin \theta_{12} - r_4 \sin \theta_{14})^2 + (-r_2 \cos \theta_{12} + r_4 \cos \theta_{14})^2 \\ &= |AB'|^2 - 2|AB'|(r_2 \sin \theta_{12} + r_4 \sin \theta_{14}) - 2r_2r_4 \cos(\theta_{12} + \theta_{14}) + r_2^2 + r_4^2 \end{aligned}$$

を得る。今、 $|O_2O_4|^2 = |O_2O'_4|^2 + z_B^2$ なので

$$|O_2O_4|^2 = |AB'|^2 - 2|AB'|(r_2 \sin \theta_{12} + r_4 \sin \theta_{14}) - 2r_2r_4 \cos(\theta_{12} + \theta_{14}) + r_2^2 + r_4^2 + z_B^2$$

を得る。

さらに、式 (2.3.1) と $|AB'|^2 + z_B^2 = |AB|^2$ を用いると

$$|AB|^2 - 2|AB'|(r_2 \sin \theta_{12} + r_4 \sin \theta_{14}) - 2r_2r_4\{\cos(\theta_{12} + \theta_{14}) - \cos(\pi - \theta'_{24})\} = 0$$

となる。 r_2, r_4 は式 (2.2.1) $r_2 \sin \theta_{12} + r_4 \sin \theta_{14} = |AB|^2 / (2|A'B'|)$ を満たしており、 r_2, r_4 は正なので

$$\cos(\theta_{12} + \theta_{14}) = \cos(\pi - \theta'_{24})$$

を得る。補題 2.1.7 から $\theta_{12} + \theta_{14} + \theta_{24} = \pi$ であるので、 $\theta_{24} = \theta'_{24}$ となる。その他の場合も同様に示せる。

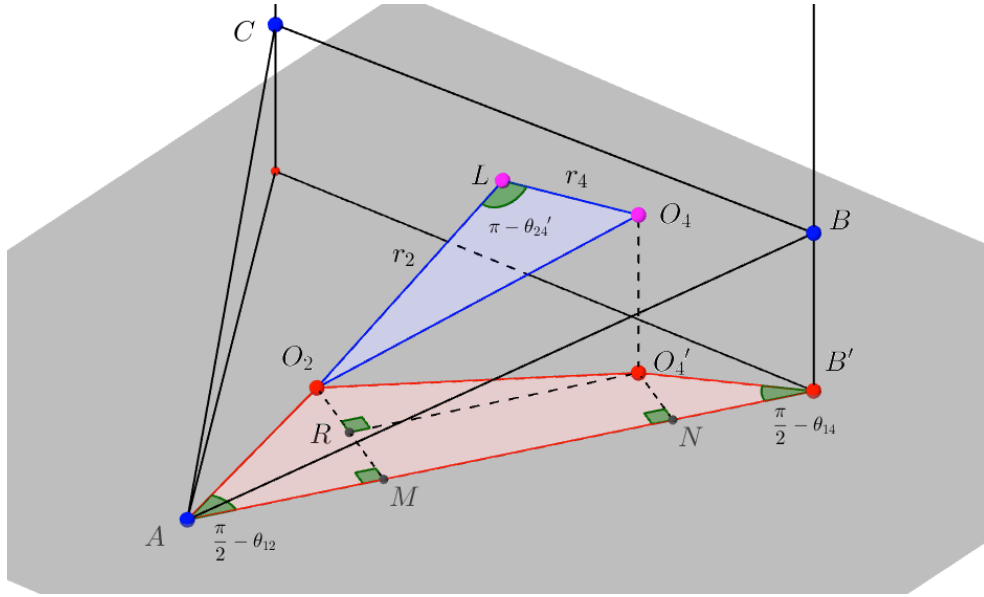


図 2.11:

(2) はじめに, 2 辺 e_{12}, e_{14} が平面 S_1 上で互いに接していることを示す. 2 辺 e_{12}, e_{14} はそれぞれ半径 $r_2 \sin \theta_{12}, r_4 \sin \theta_{14}$ の円の一部である. e_{12} をもつ円の中心と e_{14} をもつ円の中心間の距離を d とする. このとき, 図 2.12 より

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (|A'B'| - r_2 \sin \theta_{12} - r_4 \sin \theta_{14})^2 + |BB'|^2 \\
 &= (|A'B'| - |AB|/(2|A'B'|))^2 + |BB'|^2 \\
 &= |A'B'|^2 - |AB|^2 + |AB|^4/(4|A'B'|^2) + |BB'|^2 \\
 &= |AB|^4/(4|A'B'|^2) \\
 &= (r_2 \sin \theta_{12} + r_4 \sin \theta_{14})^2
 \end{aligned}$$

よって

$$d = r_2 \sin \theta_{12} + r_4 \sin \theta_{14}$$

となる. これは, e_{12} と e_{14} が互いに接していることを意味する.

次に, 辺 e_{24} が e_{12}, e_{14} の両方に接していることを示す. そうでないと仮定する. このとき, e_{24} は平面 S_1 に 2 点で交わる. e_{12} と e_{14} の接点もまた辺 e_{24} 上にあることに注意する. しかし, e_{24} と平面 S_1 のすべての交点は定義より e_{12} と e_{14} 上にある. これは e_{12} が e_{14} に接しているということに矛盾する. 従って, 辺 e_{24} は e_{12} と e_{14} の両方に接している. この共通部分は頂点 D である. その他についても同様に示せる.

(3) 3 球面 S_2, S_4, S_6 のそれぞれの中心 O_2, O_4, O_6 を通る平面を α とする. $i = 2, 4, 6$ として, 球面 S_i と平面 α の共通部分の円を C_i とする. C_2, C_4, C_6 の根心を R とする. ここで, 根心とは 2 円の交点を通る直線同士の交点である. この交点は唯 1 点定まることが知られている. 図 2.13 のように 3 つの場合が存在する. (i) R が C_2, C_4, C_6 の内部にある. (ii) R が C_2, C_4, C_6 の外部にある. (iii) R が C_2, C_4, C_6 上にある.

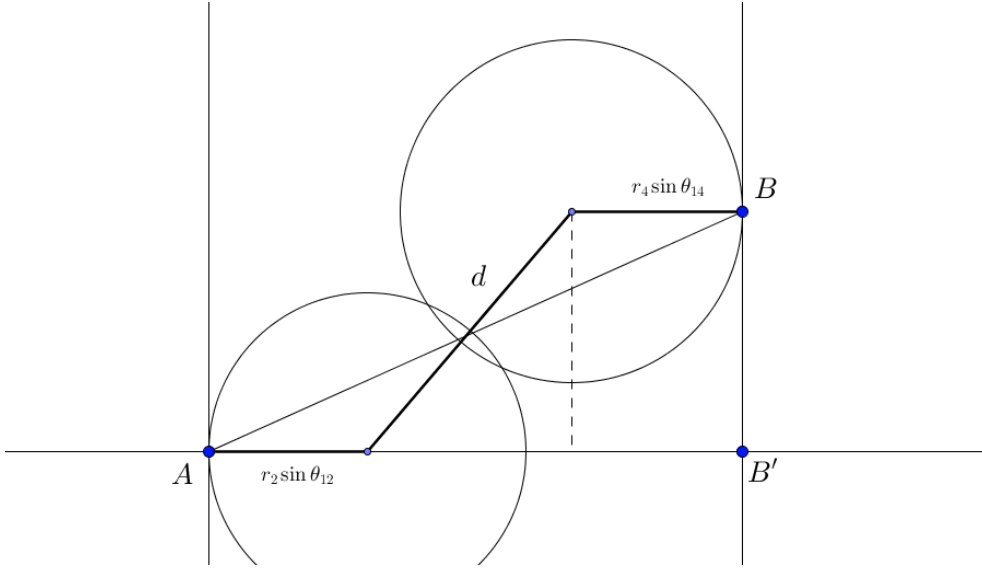


図 2.12:

(i) のとき, 図 2.13 左のように 3 交点を S_{24}, S_{46}, S_{62} とする. ここで, 2 球面 S_2 と S_4 の面角が θ_{24} なので, $\angle O_2 S_{24} O_4 = \pi - \theta_{24}$ である. 同様に, $\angle O_4 S_{46} O_6 = \pi - \theta_{46}$ と $\angle O_6 S_{62} O_2 = \pi - \theta_{26}$ が成り立つ. ゆえに

$$\angle O_2 S_{24} O_4 + \angle O_4 S_{46} O_6 + \angle O_6 S_{62} O_2 = 3\pi - \theta_{24} - \theta_{46} - \theta_{26} = 2\pi$$

である. 一方で, 図 2.13 左から

$$\angle O_2 S_{24} O_4 < \angle O_2 R O_4$$

$$\angle O_4 S_{46} O_6 < \angle O_4 R O_6$$

$$\angle O_6 S_{62} O_2 < \angle O_6 R O_2$$

と

$$\angle O_2 R O_4 + \angle O_4 R O_6 + \angle O_6 R O_2 = 2\pi$$

となる. これは矛盾である. そのため, この場合は起こり得ない. 同様に, (ii) も起こり得ない. 根心 R は 3 円 C_2, C_4, C_6 の共通部分であるということになる. これは, R が 3 球面 S_2, S_4, S_6 の唯 1 つの共通部分であることを意味する. この共通部分は頂点 G である.

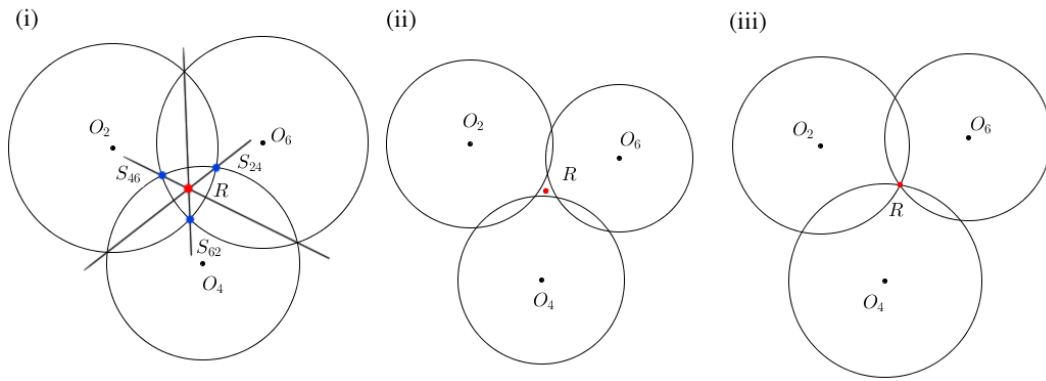


図 2.13:

(4)

(有理性) $(i, j) = (1, 3), (3, 5), (1, 5)$ に対して, 面角 $\theta_{13}, \theta_{35}, \theta_{15}$ は平面 S_1, S_3, S_5 からなる 3 角柱の $z = 0$ 上の 3 角形 $A'B'C'$ の内角を表している, 有理性は正しい. また, $(i, j) = (1, 2), (1, 4), (3, 6), (2, 3), (4, 5), (5, 6)$ に対して, 命題 2.2.4 より正しい. $(i, j) = (2, 4), (2, 6), (4, 6)$ に対しては, 定理 2.3.1 (1) から正しい.

(理想性) $H = \infty$ において, 3 辺 AH, BH, CH は平行線なので, それらは無限遠点 ∞ で接する. 3 頂点 A, B, C において, 命題 2.2.4 (2) は各頂点での 3 辺が互いに接しているということになる. 4 頂点 D, E, F, G において, 定理 2.3.1 (2), (3) ですでに示された. \square

2.4 パラメータ空間

前節までの結果から面角の組み合わせ (n_{ij}) を固定することで, (z_B, z_C) を理想有球面立方体のパラメータとできる. 本節では, 任意の $(i, j) \in E$ に対して, $n_{ij} = 3$ の場合, すなわち補題 2.2.2 の (a) のときの変形空間を考える. (a) は特別な場合で, 他の 10 組でも同様に考えることができる.

定理 2.4.1.

P が任意の面角が $\frac{\pi}{3}$ である理想有球面立方体であるための必要十分条件は (z_B, z_C) が

$$\begin{cases} -3/2 < z_B z_C < 3/4 \\ -3/2 < z_B^2 - z_B z_C < 3/4 \\ -3/2 < z_C^2 - z_B z_C < 3/4 \end{cases}$$

を満たすことである (図 2.14).

証明. このとき, 任意の面角は $\theta_{ij} = \frac{\pi}{3}$ なので, 1 次方程式 (2.2.1) より r_2, r_4, r_6 は (z_B, z_C) を用いて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_2 \\ r_4 \\ r_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{3+z_B^2}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3+(z_B-z_C)^2}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3+z_C^2}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3+z_B^2}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3+(z_B-z_C)^2}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3+z_C^2}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3+2z_B z_C}{6} \\ \frac{3+2z_B^2-2z_B z_C}{6} \\ \frac{3+2z_C^2-2z_B z_C}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる.

このとき, 半径 r_2, r_4, r_6 は正でなければならない. また, 6 球面 S_1, \dots, S_6 が囲む領域が単連結であるためには, S_2 と S_5 が交わらず, S_4 と S_3 が交わらず, S_6 と S_1 が交わってはならない. S_2 と S_5 が交わらない, すなわち球面 S_2 の中心から平面 S_5 までの距離 $3/2 - r_2$ が r_2 より大きくなればよい. ゆえに, S_2 と S_5 が交わらないことは $r_2 < 3/4$ であることと同値である. 同様に, $r_4 < 3/4, r_6 < 3/4$ である. 従って, r_2, r_4, r_6 は

$$\begin{cases} 0 < r_2 < 3/4 \\ 0 < r_4 < 3/4 \\ 0 < r_6 < 3/4 \end{cases}$$

を満たさなければならない。従って

$$\begin{cases} -3/2 < z_B z_C < 3/4 \\ -3/2 < z_B^2 - z_B z_C < 3/4 \\ -3/2 < z_C^2 - z_B z_C < 3/4 \end{cases}$$

を得る。

□

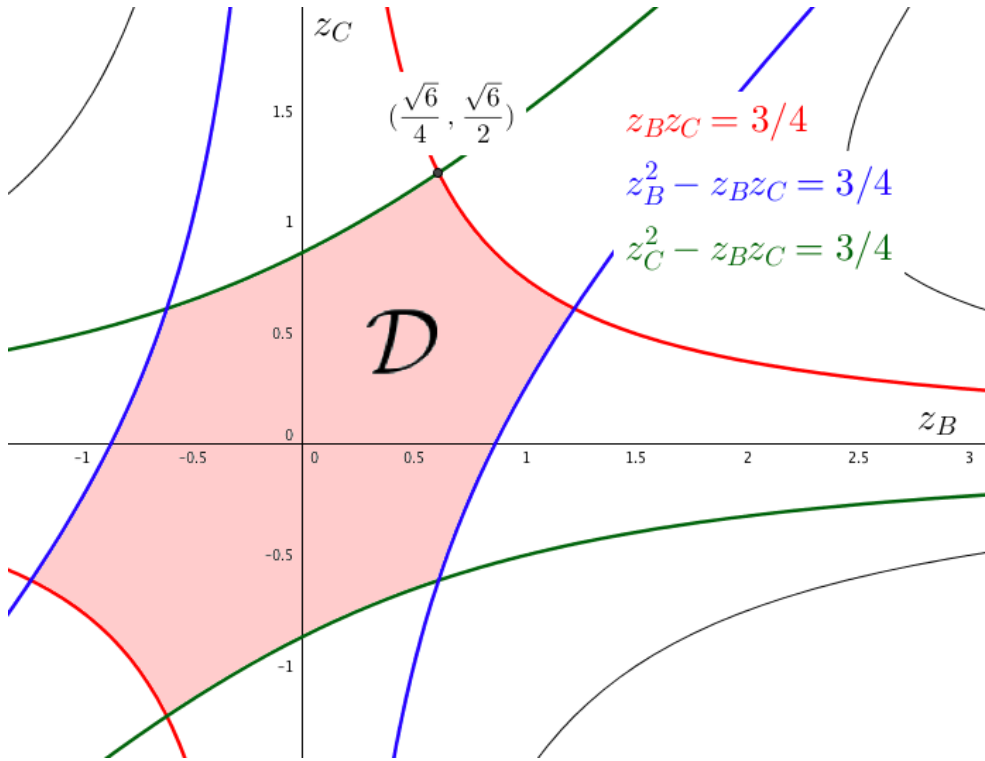


図 2.14:

領域 \mathcal{D} は任意の面角が $\frac{\pi}{3}$ である理想有理球面立方体のパラメータ空間と見なせる。すなわち

$$F : \{[P]\} \rightarrow \mathcal{D}$$

を満たす全単射写像 F が存在する。

ここで、2つの双曲線 $z_C^2 - z_B z_C = 3/4$ と $z_B z_C = 3/4$ は $(\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/2)$ で交わり、この点は直線 $z_C = 2z_B$ 上にある。図 2.14 で、 $z_C^2 - z_B z_C = 3/4$ 上の点はこの領域に含まれていない。 (z_B, z_C) がこの双曲線上にあるとき、平面 S_2 は球面 S_5 に接している。さらに、 $(z_B, z_C) = (\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/2)$ のとき、平面 S_3 もまた球面 S_4 に接している。

2.5 その他の面角に対するパラメータ空間

以下のグラフは他の面角の組み合わせに対する変形空間である。これより、定理 2.1.4 が示される。グラフは [3] にある結果であるが、自身では未確認であるため今後の課題としたい。

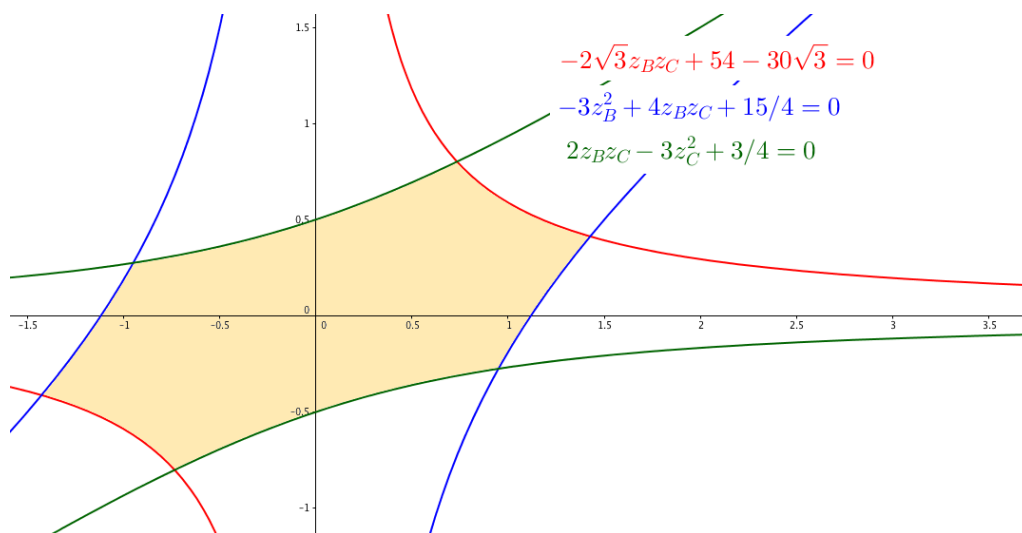


図 2.15: (b) $(2, 3, 3, 3, 6, 6, 2, 3, 3, 3, 3, 3)$ のとき

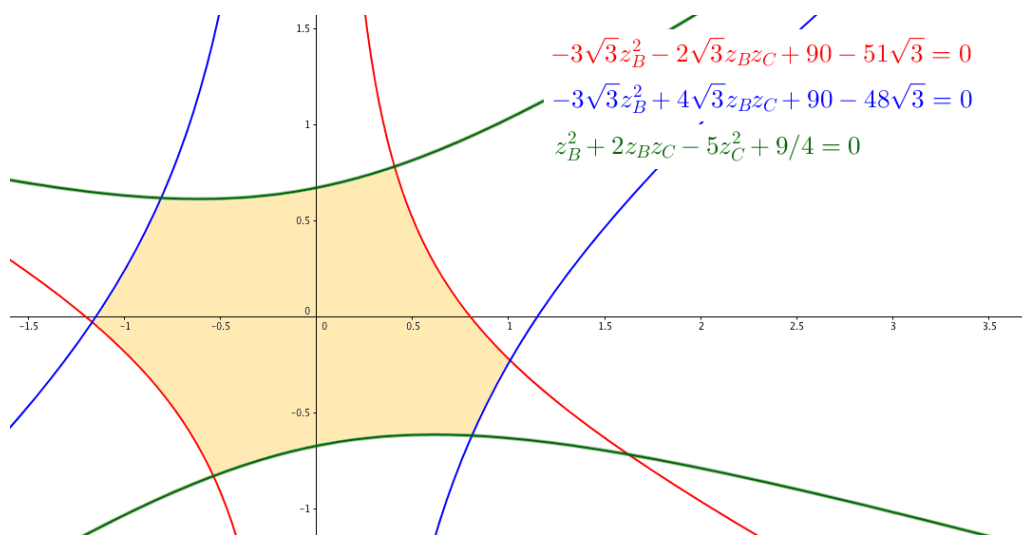


図 2.16: (c) $(2, 3, 6, 3, 6, 3, 2, 3, 3, 2, 6, 3)$ のとき

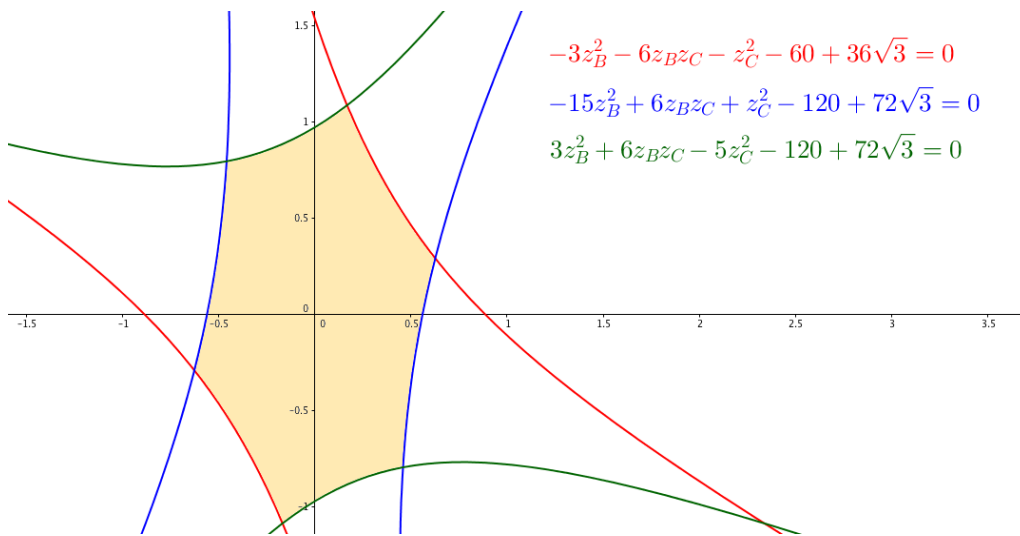


図 2.17: (d) (6, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 6, 3, 3, 6, 2) のとき

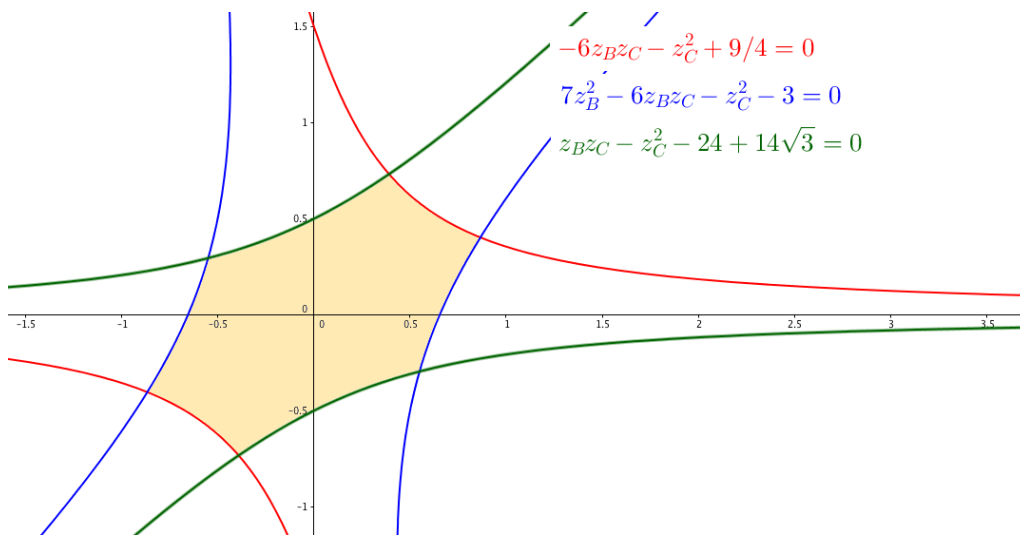


図 2.18: (e) (3, 2, 2, 3, 6, 6, 2, 6, 3, 6, 3, 2) のとき

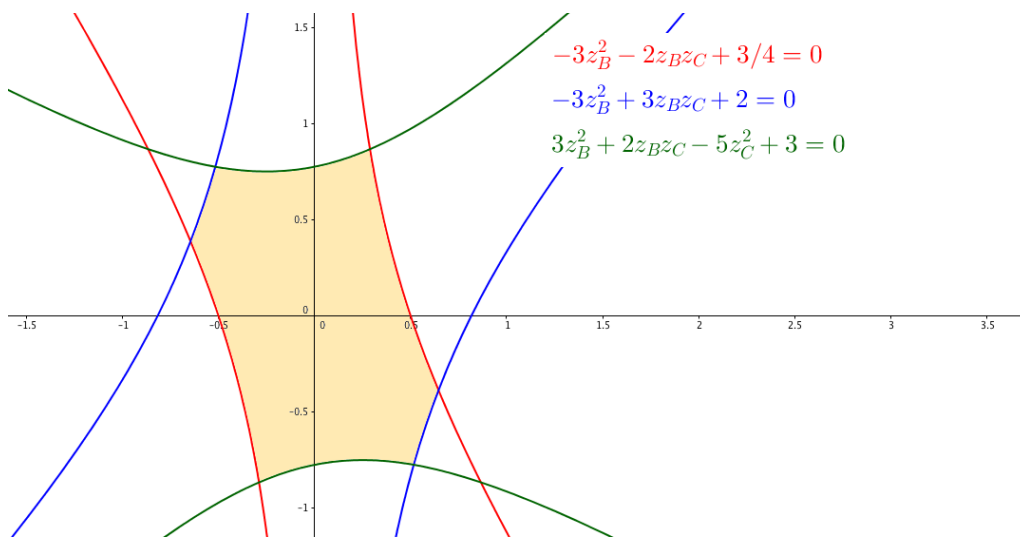


図 2.19: (h) (3, 2, 6, 3, 6, 2, 3, 6, 2, 2, 6, 3) のとき

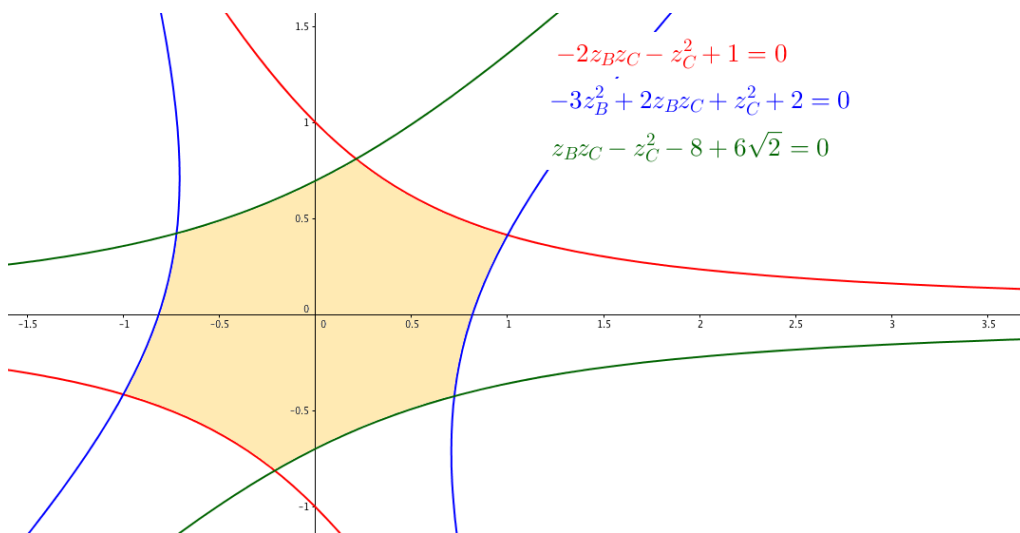


図 2.20: (i) (4, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2) のとき

(f), (g), (j), (k) のとき, 理想有理球面体となる (z_B, z_C) の解は存在しない. 実際,
(f) (3, 2, 2, 3, 6, 6, 3, 6, 2, 6, 2, 3) のとき

$$\begin{cases} 0 < \frac{z_B z_C}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 < \frac{1 + z_B^2 - z_B z_C}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 < \frac{3 + z_C^2 - z_B z_C}{2\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(g) (6, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 6, 2, 6, 2, 3) のとき

$$\begin{cases} 0 < \frac{z_B z_C}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ 0 < \frac{2 + 2z_B^2 - z_B z_C}{4} < \frac{1}{2} \\ 0 < \frac{\sqrt{3}(6 + 2z_C^2 - 3z_B z_C)}{12} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(j) (4, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 4, 2, 4) のとき

$$\begin{cases} 0 < \frac{z_B z_C}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 < \frac{\sqrt{2}(2 + z_B^2 - z_B z_C)}{\sqrt{2}(2 + z_B^2 - z_B z_C)} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 < \frac{\sqrt{2}(2 + z_C^2 - z_B z_C)}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(k) (6, 2, 2, 4, 3, 3, 6, 4, 2, 4, 2, 4) のとき

$$\begin{cases} 0 < \frac{2z_B z_C}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} < \frac{1}{\cos(\pi/12) + 1} \\ 0 < \frac{\sqrt{2}(2(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})z_B^2 - 2z_B z_C)}{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 < \frac{\sqrt{2}(2(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})z_C^2 - 2\sqrt{3}z_B z_C)}{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})} < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

これらの場合の (z_B, z_C) の解は存在しない.

2.6 極限集合

前章の 1.6 節, 1.7 節と同様の考察をする.

定義 2.6.1. 球面立方体 P をなす 6 球面 S_i に関する鏡映変換を $\phi_i \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ とし, これらが生成する群を $\Gamma = \langle \phi_1, \dots, \phi_6 \rangle$ とするとき

$$\Lambda(\Gamma) = \partial \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma P \right)$$

を球面立方体 P に関する極限集合という.

はじめに, 極限集合が球面となるような特別な場合について考える. 以下の定理は, クライン群論でよく知られたものである.

定理 2.6.2. 球面立方体 P に対して, P の 8 頂点を通る球面を S_0 とする. P の各辺が球面 S_0 に直交するとき, 球面 S_0 と P の極限集合は一致する.

証明. ここでは, P の極限集合が S_0 に含まれていることを示す. はじめに, 補題 2.1.6 より任意の球面立方体の 8 頂点は同一球面上に存在することに注意する. この球面立方体 P を $H = \infty$ なる鉛直系に正規化して考える. 今, 各辺が 7 頂点を通る平面で直交することから, 図 2.21 のように P の鉛直系は 7 頂点が xy 平面上にあるような図形になる. このとき, 球面 S_i に関する鏡映変換を $\phi_i \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ とし, これらが生成する群を Γ とする. 任意の $\gamma \in \Gamma$ に関する像を考えると, P をなす 6 球面が xy 平面で直交していることことから, 各頂点は xy 平面上の点に写る. これは, 直交球面立方体の極限集合が球面であることを示している. \square

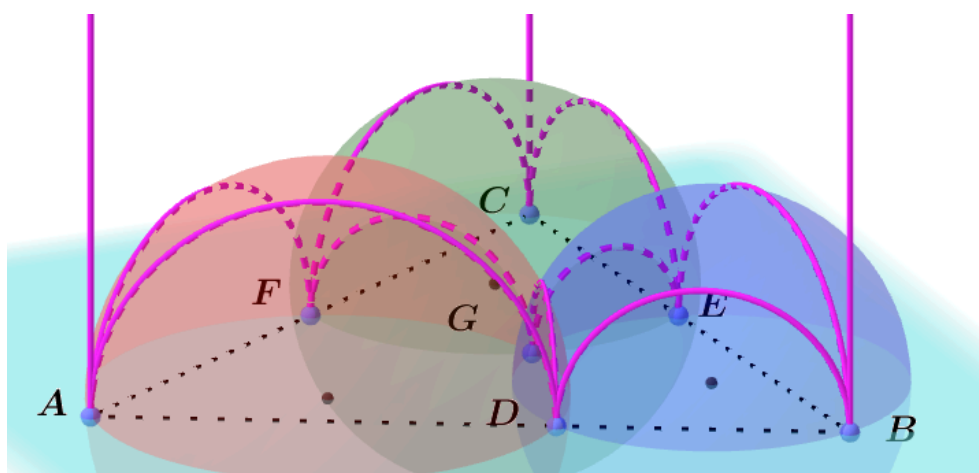


図 2.21: 極限集合が球面となる球面立方体

このように極限集合が球面となるような球面立方体を直交球面立方体という。ここで考えた極限集合は特別な場合であり、一般には図 2.22, 図 2.23 に示すように、球体を部分的に膨らませたような図形であり、またフラクタル図形、すなわち自己相似形である。論文中の 3 次元空間における極限集合を示した図は明治大学 阿原一志先生, 同大学 中村建人氏, 荒木義明先生より頂いたものである。前章と同様に、レンズによる図形の挟み込みによる変形を導入して、極限集合について考える。

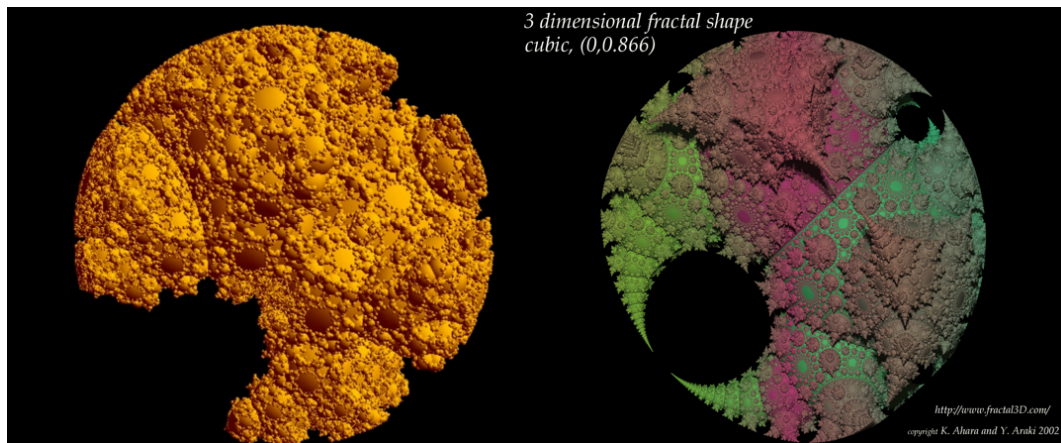


図 2.22: 球面立方体に関する極限集合 (阿原先生, 荒木先生, 中村氏による)

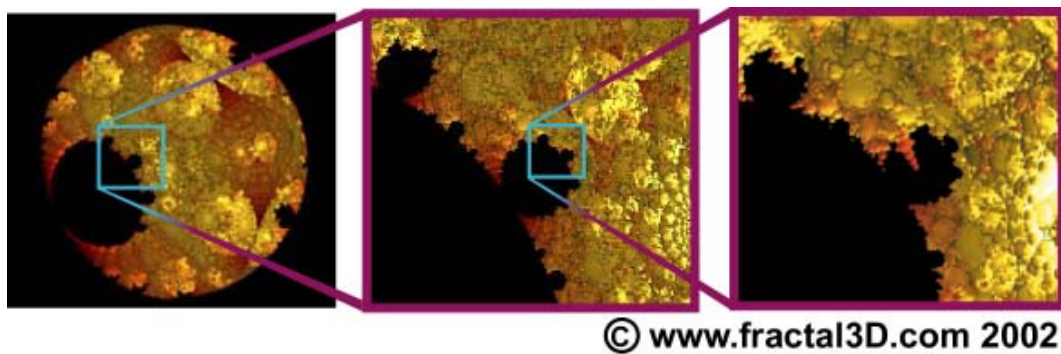


図 2.23: フラクタル構造の様子 (<http://fractal3d.com/lim.html>)

2.7 レンズ

本節では、2次元のときと同様に、3次元空間におけるレンズの挟み込みによる変形を導入し、これを用いて極限集合について考えたい。ただし、ここでは任意の面角が $\frac{\pi}{3}$ である直交球面立方体にのみレンズを挟み込むことを考える。

まずはじめに、レンズの挟み込みによる変形を次のように定めよう。3次元球体 B に対して、 ∂B に直交する球面 S を考える。この直交球面 S と球体 B の共通部分を L とする。このとき、 $B - L$ は2つの連結成分をもつので、それぞれを B_1, B_2 とする。また、円 ∂L 上に2点 p_1, p_2 をとる。

$p_1 \mapsto (0, 0, 0), p_2 \mapsto \infty$ なる変換 $\psi \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ による像を考えると、球面 ∂B は原点を通る平面、 L はこれに直交する平面に写る。ここで、 $\psi(B)$ を上半空間、 $\psi(\partial L)$ を x 軸と仮定すると、 L は上半空間上の zx 平面に写る。 $y > 0$ の領域を B_1 の像とする。

このとき、 zx 平面からの仰角を $y < 0$ の方向に θ だけ回転させる変換を g_θ とし、この変換による B_2 の像を考える。図 2.24 は ψ と g_θ による像を示しており、見やすくするために上半空間上の領域を立方体と見なして示している。

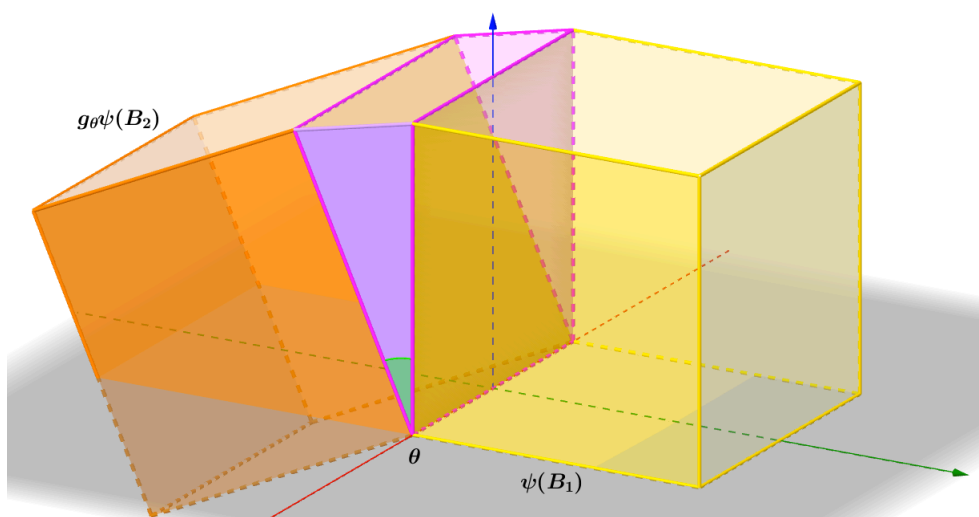


図 2.24: レンズの挟み込みによる変形

さらに、逆変換 ψ^{-1} による $\psi(B_1) \cup g_\theta\psi(B_2)$ の像を考えることで、球体 B は L にレンズ状の図形を挟み込んだような図形に変形される。

このとき、 $L, \psi^{-1}g_\theta\psi(L)$ を境界にもつ、面角 θ の領域を3次元空間における θ レンズと定義する。図 2.25 は θ レンズの挟み込みによる変形された球体 B を示している。実際には B , レンズともに3次元多様体であるが、見やすくするために、球体 B の一部のみを示している。

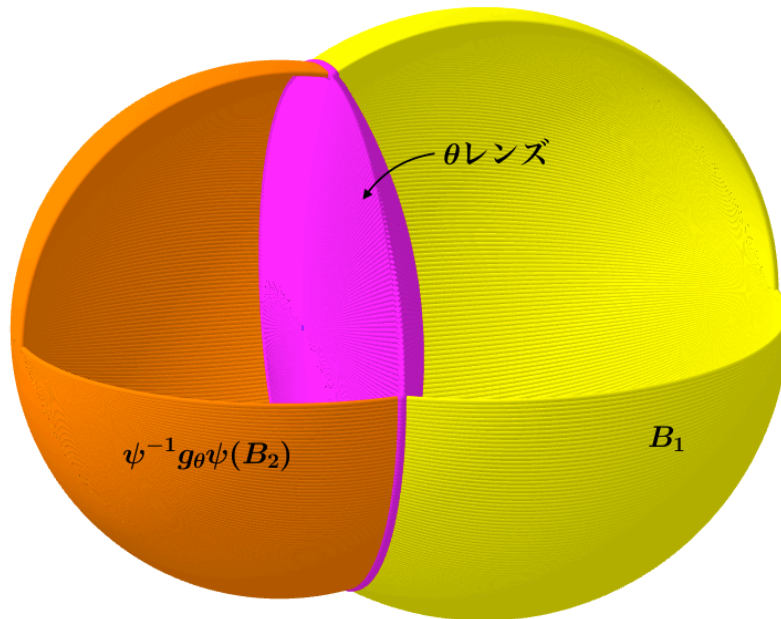


図 2.25: 球体のレンズの挟み込みによる変形

次に、球面立方体をなす球面のうち向かい合う 2 球面が同心球面状に写る変換について考えたい。はじめに、次の定理を取り上げる。

定理 2.7.1. 互いに交わらない 2 球面 S_1, S_2 に対して、2 球面を同心球面状に写すメビウス変換が存在する。さらに、2 球面に直交する球面はすべて 2 定点を通る。

証明. 球面 S_2 上の点を無限遠点 ∞ に写す変換 $\phi \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ による像を考えると、球面 S_1, S_2 はそれぞれ図 2.26 左のように球面 $T_1 := \phi(S_1)$ と平面 $T_2 := \phi(S_2)$ に写る。このとき、 T_1, T_2 に直交するものとして、直線 l と球面 S を考えることができる。 l は球面 T_1 の中心を通り、平面 T_2 に直交する直線であり、 S は直線 l と平面 T_2 との交点を中心とする直交球面である (図 2.26 左)。

ここで、図左のように直線 l と球面 S との交点を p_1, p_2 とする。このとき、 $p_1 \mapsto (0, 0, 0)$, $p_2 \mapsto \infty$ なる変換 $\psi \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ による像を考えると、図右のように原点中心の球面 T_1 が内側、平面 T_2 が外側の同心球面状の図形に写る。

さらに、2 球面 $\psi(T_1)$ と $\psi(T_2)$ に直交する球面はすべて原点を通る平面である。これらすべての平面が無限遠点を通るので、 $\phi^{-1}(p_1), \phi^{-1}(p_2)$ が求める 2 定点である。□

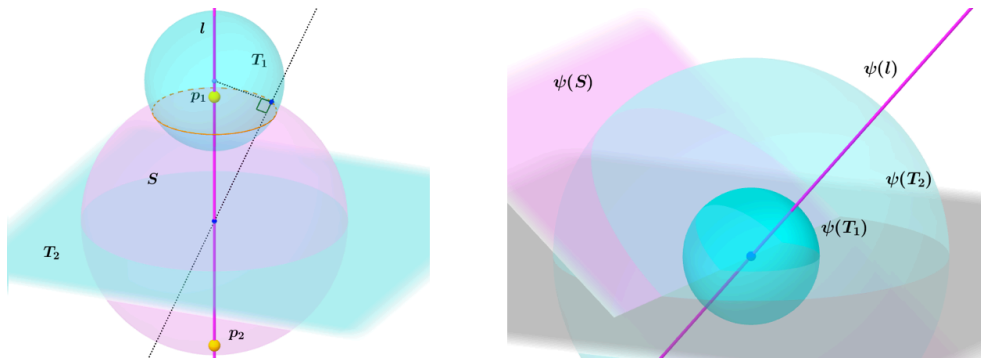


図 2.26: 同心球面状に写す変換の存在

定理 2.7.1 を用いて, 任意の面角が $\frac{\pi}{3}$ である直交球面立方体は次のように変形する. この直交球面立方体 P をなす球面 S_1, S_6 にこの定理を適用する. 定理 2.7.1 の 2 定点のうち球体 B_1 上の点を p_1 , B_6 上の点を p_2 とする. このとき, $p_1 \mapsto (0, 0, 0)$, $p_2 \mapsto \infty$, $A \mapsto (1, 0, 0)$ なる変換 $\psi \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ による像を考える. このとき, P の 8 頂点を通る直交球面 S_0 は x 軸を通る平面に写る. この平面 $\psi(S_0)$ を xy 平面と仮定する. また, P をなす 6 球面の像はすべて xy 平面に直交する. さらに, 任意の面角が $\frac{\pi}{3}$ であることから, S_1 以外の 5 球面の像の半径は一意に定まることから, P は図 2.27 のような対称的な図形に写る.

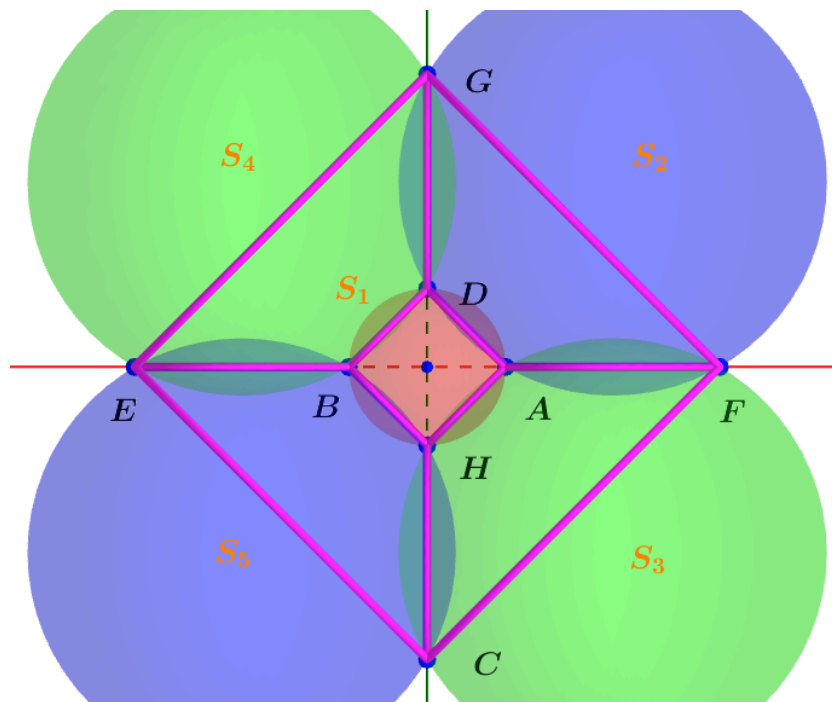


図 2.27: 任意の面角が $\frac{\pi}{3}$ である直交球面立方体の変形

変形した直交球面立方体 $\psi(P)$ の球面 $\psi(S_2)$ と $\psi(S_5)$ の間にレンズを挟み込むことを考

える. ここで, 原点を通り, 球面 S_2, S_5 の像の中心を結ぶ直線に垂直で, xy 平面に直交する平面をレンズの挟み込む位置 L の像とし, 図 2.28 のように θ だけ回転させる変換を $g_\theta \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^3)$ とすると, 対称性から, $\psi(S_5)$ のみを回転できる. したがって, P に θ レンズを挟み込んだ球面立方体は $\psi^{-1}(g_\theta \cup id)\psi(P)$ と表せる.

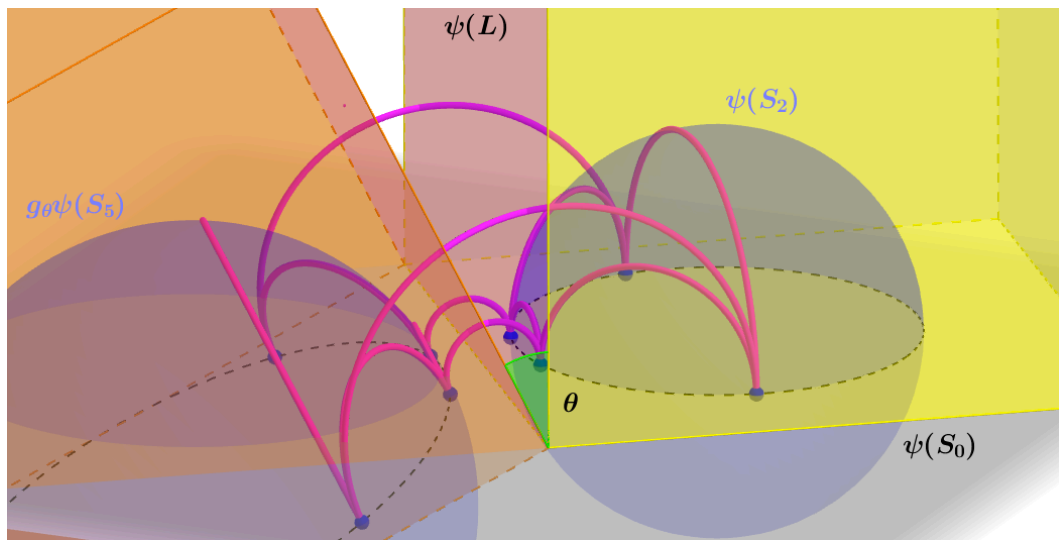


図 2.28: 球面立方体のレンズの挟み込みによる変形

最後に, この直交球面立方体 P の θ レンズの挟み込みにより得られた球面立方体 P_θ の極限集合について考える. P をなす 6 球面それぞれに関する鏡映変換が生成する群を Γ とすると, 定理 2.6.2 より P の極限集合 Λ_0 は球面である. このとき, Λ_0 の内部の領域, すなわち球体を Ω_0 とする.

前章 1.7 と同様の考察ができる. すなわち, 球体 Ω_0 に θ レンズを挟み込むことを考えれば, P_θ の極限集合が得られる. 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して, γL が球面 Λ_0 に直交することから, $\{\gamma L; \gamma \in \Gamma\}$ が Ω_0 の θ レンズを挟み込むすべての位置になる. ただし, 挟み込むレンズの 1 面が γL の θ レンズであることに注意する. このとき, すべての γL に θ レンズを挟み込み, 得られた領域の境界をとることで, P_θ の極限集合 Λ_θ が得られる. ただし, ここで考えた変形は特別な場合であり, 一般的な直交球面立方体に対するレンズの挟み込む位置については未解決であるため, 今後の課題としたい.

課題

第1章では、2次元平面上の4円辺形の変形空間及び極限集合を考察することができた。同様に、隣接した5円盤がなす円辺形: 5円辺形についても同様に考えたが、まとめるには至らず、次の課題が残った。4円辺形の場合と同様、鉛直系と同心系に相当する正規化を導入することで、変形空間は4次元であることがわかる。しかし、5円辺形のパラメータ表示に難航した。また、極限集合に関しては、同様にレンズの挟み込みによる変形を考えることができる。このとき、レンズを挟み込む位置は2箇所存在することがわかっているのだが、レンズの挟み込む位置について明確な理由を見つけることができなかった。

第2章では、理想有理球面立方体に制限することで、変形空間が2次元であることがわかった。しかし、私が[3]を用いて考察したのは、任意の面角が $\frac{\pi}{3}$ の場合のみであるので、その他の場合の変形空間について再計算したい。また、レンズに関して、その他の有理角をもつときの変形や、明確なレンズを挟み込む位置など未解決な点が幾つかある。これらの未解決な点を今後の課題としたい。

関連図書

- [1] J.W.Cannon, W.J.Floyd, R.Kenyon and W.R.Parry, "Hyperbolic Geometry", Flavors of Geometry MSRI Publications Volume 31, 1997.
- [2] A.F.Beardon, "The Geometry of Discrete Groups", Springer, 1995.
- [3] K.Ahara and Y.Araki, "Classification of Ideal Regular Sphairahedra", preprint, 2004.