

名古屋大学大学院
多元数理科学研究科修士論文

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ との擬等角同値性について

著者氏名 藤野 弘基
指導教員 大沢 健夫

2014年2月

序文

本論文の主な目的は, Riemann 面が $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同値になるための条件の研究において, 新しく得られた二三の結果を報告することである (第 4 章). また本研究に関連して, “擬等角写像によって不変な性質” (第 2 章), “擬円板の幾何学的特徴付け” (第 3 章) についてサーベイをまとめた.

まず本研究の背景にある問題について述べる.

擬等角写像は Riemann 面の普遍被覆面を変えない, (理想) 境界の容量が 0 という性質 (つまり Green 関数を持たないという性質) を変えないなど, Riemann 面を適度に変形し, 可微分同相写像に比べ変形しすぎないという特徴を持つ. それゆえ Riemann 面を変形するのに非常に適した道具として擬等角写像が用いられる. Riemann 面 R を一つ固定し, Riemann 面 S と擬等角写像 $f : R \rightarrow S$ のペア (S, f) の全体を $X(R)$ と書く. $X(R)$ の元 (S, f) と (T, g) が Teichmüller 同値であるとは, 等角写像 $h : S \rightarrow T$ で $h \circ f$ が g と, ∂R をとめてホモトピックとなるようなものが存在することを言う. ここで ∂R は R のある理想境界を表す. このとき $X(R)$ を Teichmüller 同値によって割ることで得られる空間 $T(R)$ は Teichmüller 空間と呼ばれ, Riemann 面 R の擬等角変形の全体を記述する空間である.

Teichmüller 空間 $T(R)$ は Teichmüller 距離と呼ばれる距離によって完備な距離空間となり, R が解析的有限¹ であるときには例えば Bers 埋め込みを用いた方法により複素構造が入る. つまり $T(R)$ は (有限次元) 複素多様体となる. さらに, $T(R)$ が (有限次元の) 複素多様体の構造を持つのは R が解析的有限であるときに限られることが知られており ([16, pp. 299-301] 参照), それゆえ R が解析的有限でないときには $T(R)$ は無限次元 Teichmüller 空間と呼ばれる.

有限次元 Teichmüller 空間については Teichmüller による重要な結果 [27] を始めとして非常に多くの性質が知られているが, 一方で無限次元 Teichmüller 空間になると大きな障害が存在し, 未だ解明されていないことも多い. 例えば講究録 [36] に多くの問題が紹介されている. 無限次元 Teichmüller 空間は非常に広大な空間であるから, その研究方法として Teichmüller 空間を狭めて新たな空間を作りそれを研究対象にするというものが見られる. 例えば Earle–Gardinar–Lakic [5], [4] によって導入され

¹Riemann 面 R が解析的有限であるとは, R がコンパクト Riemann 面から有限個の punctures を空けたものであることを言う.

た漸近的 Teichmüller 空間² や, 最近では p 乗可積分 Teichmüller 空間も考えられている.

これに対し筆者は, 無限次元 Teichmüller 空間の理論への一つのアプローチとして解析的有限な Riemann 面に近い Riemann 面の Teichmüller 空間を研究するという方法を試してきた. 例えば $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ は,

- i. Riemann 球面から可算無限個の点を除いて得られる Riemann 面である.
- ii. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の自己同型 $z + n$ の生成する巡回群 $\langle z + n \rangle$ による商 Riemann 面 $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) / \langle z + n \rangle$ は解析的有限である.

という点で解析的有限な Riemann 面に近い Riemann 面であり, 詳しく研究されるべき重要なモデルであると考えている. このようなアプローチを試みるのは自然な流れであるように思われるが先行研究は見つからない. 以上の背景をもとに, 以下では本論文で論じられる研究内容とその結果について述べる.

本論文では $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の Teichmüller 空間を記述することを考える.

Riemann 面 R' が $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相であるときには, R' は複素平面から離散集合を除いたものに等角同値であることが示される (4.1 節参照). まずは $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の Teichmüller 空間について次の問題を考える.

Problem

\mathbb{C} の無限個の元を持つ離散集合 A で $\mathbb{C} \setminus A$ が領域となるものの全体を \mathcal{P} とする. $A \in \mathcal{P}$ で $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が擬等角同相になるものを決定せよ.

つまり Teichmüller 空間 $T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ の元 $[S, f]$ にどのような Riemann 面 S が現れ得るかを調べるのがこの問題の目的である. 前述したように擬等角写像は Riemann 面を変形しすぎないという特徴を持つため, 同相な面でどのようなものが除外されるかが興味深い. 筆者はこの問題に対しての部分的な解決として次の判定条件を得た.

Theorem

$A \in \mathcal{P}$ とする. 離散集合 $B \subset \mathbb{R}$ で, $\mathbb{C} \setminus B$ が $\mathbb{C} \setminus A$ と擬等角同相になるものが存在するとき次が成り立つ.

$$\sup_{z \in \mathbb{C}, r > 0} \frac{r}{d(z, r; A)}, \quad \sup_{z \in \mathbb{C}, r > 0} \frac{r}{\tilde{d}(z, r; A)} < +\infty.$$

²正確には Gardinar–Sullivan[7] によって上半平面に対して導入されたのが最初である.

ただし, $d(z, r; A)$, $\tilde{d}(z, r; A)$ は 4.2 節で定義される量で, A の点分布の
 一様さを測るものである. 分布が二次元的に一様な程, r を大きくしたと
 き $d(z, r; A)$, $\tilde{d}(z, r; A)$ の増加は小さくなる. この判定条件から例えば

Corollary $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ は擬等角同相ではない.

が示される. この定理の証明には擬円板の幾何学的特徴付けの一つである
 領域の一様性を用いた. また, 擬円板の性質を用いるというアイデアは川
 平友規先生にご教示頂いた.

さて, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ は有限型 Riemann 面に近いものであると考えているが, そ
 れでも $T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ は非常に広大であり, その性質を解明するには少し段階
 を踏むべきかもしれない. そのため, $T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ の研究の前段階として次の
 部分空間

$$\bar{T} = \{[S, f] \in T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \mid \exists h \in \text{Aut}(S) \text{ s.t. } \text{ord}(h) = +\infty\}$$

について詳しく調べることにする. この \bar{T} は, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の対称性の高さを表
 す “無限位数の自己同型を持つ” という性質を保存するような擬等角変形
 の全体を表している.

ここで, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の特徴 ii) について考える. $R_n = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) / \langle z + n \rangle$ とする
 と, 自然な埋め込み $\iota_n : T(R_n) \hookrightarrow T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ が得られるが, McMullen [19]
 によるとこの埋め込みは全測地的である. $T(R_n)$ は有限次元 Teichmüller 空
 間であったから, $\iota_n(T(R_n))$ について非常に多くの情報が得られる. さ
 らに $\iota_n(T(R_n))$ の元が表す $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の変形は, $z + n$ を周期とする周期的変形
 であるため幾何学的にも考え易い.

このとき, $\bar{T}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \iota_n(T(R_n))$ と置き, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の Teichmüller-modular
 群を Mod とすれば³,

$$\text{Conjecture A} \quad \bigcup_{[f] \in \text{Mod}} [f]_* (\bar{T}_0) = \bar{T} \quad (1)$$

が成り立つだろうということが分かってきた. この等式 (1) は, \bar{T} の元が
 表す $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の変形が, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の自己擬等角写像による変形と, \bar{T}_0 による周
 期的変形との合成に分解されることを意味している.

$\iota_n(T(R_n))$ が \bar{T} に含まれることは容易にわかるため $\bar{T}_0 \subset \bar{T}$ が成り立つ.
 さらに任意の $[f] \in \text{Mod}$ に対して $[f]_* (\bar{T}_0) \subset \bar{T}$ である事も, Teichmüller-
 modular 群の作用の定義から明らかであるため

$$\bigcup_{[f] \in \text{Mod}} [f]_* (\bar{T}_0) \subset \bar{T}$$

³Mod は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の自己擬等角写像の Teichmüller 同値類の全体で, 各 $[f] \in \text{Mod}$ の
 $T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ への作用 $[f]_*([S, g]) = [S, g \circ f^{-1}]$ は Teichmüller 距離に関して等長的で
 ある.

は自明である. 一方, 逆向きの包含関係を示すためには次の予想が解決されれば良いことがわかった.

Conjecture B

$A \in \mathcal{P}$ とする. $z+1 \in \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus A)$ であり, $(\mathbb{C} \setminus A)/\langle z+1 \rangle$ が無限個の punctures を持つならば, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ は擬等角同相でない.

つまり等式 (1) の証明は上述した Problem の特別な場合に帰着される. この予想の根拠となるのが本研究で得られた次の結果である.

Theorem

$A \in \mathcal{P}$ は, $z+1 \in \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus A)$ であり, $(\mathbb{C} \setminus A)/\langle z+1 \rangle$ は無限個の punctures を持つとする. このとき $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が擬等角同相ならば, 任意の $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ に対してある $a \in A$ が存在して以下を満たす.

$$\#\{D_\varepsilon(a) \cap A\} \geq d.$$

$A \in \mathcal{P}$ は集積点を持たないため, この定理から非常に極端な例を除いて Conjecture B が成り立つ (Example 4.4.5 参照). 以上のように, この結果は Problem の部分的解決であると共に, Conjecture A の解決を目指すものである.

最後に本論文の構成について述べる. 本論文は全四章からなり, 第 1 章では本研究の基礎概念である曲線族モジュラス, 極値的距離および擬等角写像について解説する. これらの概念は非常に基本的なもので多くの性質が知られているが, ここでは本論文の主題である第 4 章の証明で用いる性質のみを述べるに留めた. 証明は極力与えるようにしたが, 極値的距離の下からの評価を与える Vuorinen の定理 [32, Lemma 4.7] (1988) については, 第 4 章で重要な役割を果たすものの, 結果を紹介するのみとしている.

第 2 章では本論文の一つのテーマであると言える “擬等角写像によって不変な性質” について, 古典的な結果をサーベイとしてまとめた. 特に Pfluger [23] (1962) による, Green 関数を持つという性質が擬等角不変であるという結果については証明まで詳しく与えた. また, この結果に関連して Nakai [20] (1962) による重要な結果を紹介し, Evans-Selberg ポテンシャルについても簡単に触れた.

第 3 章では擬円板, 擬円周領域, 擬球面領域を定義し, その幾何学的な特徴付けについてサーベイとしてまとめた. また, 前述したように擬円板の一様性は第 4 章の証明において決定的な役割を果たす. 従ってこの章は第 4 章への準備も兼ねている. 擬円板および擬円周領域, 擬球面領域は,

一様領域, LLC 領域, QED 領域と非常に密接な関係があり, 特に単連結平面領域に対してはこれらは全て同値である⁴. この意味でこれらの領域は, 擬円板の (幾何学的) 特徴付けと呼ばれる. しかし擬円板の幾何学的特徴付けはこれらに限らず非常に多く存在し, それらの特徴付けは, 擬等角写像の様々な特徴付けの定理も合わせて, 鎖状にあるいは円状に定理がつながって証明が完成されるものである. そのため上記の四種類の領域の同値性の証明はその一部を与えるに留めた. ただしその一部については Gehring–Martio [12] (1985) の証明を参考に最も強い形で証明を与えた.

第 4 章では前述した二つの定理を証明する. 尚, 上述したように本研究の背景には無限次元 Teichmüller 空間の理論が密接に関係しているが, 本論文中では話の混雑を避けるため, 研究内容と Teichmüller 空間との関係については触れないことにした.

謝辞

学部四年次以来, 常に厳しくご指導ご助言頂いた大沢健夫先生の力添えにより, 本論文を完成させることができました. 本研究を通して, 数学研究の厳しさ, 進展を得られた時の喜びに触れられたことは, ひとえに同先生のご指導の賜物であると感じます. これらに対する感謝の念は筆舌に尽くし難いものではありませんが, 同先生に心より感謝申し上げます. 有り難うございました.

川平友規先生には, 本研究の進展において重要となった“擬円板の性質を用いる”というアイデアを頂きましたことを, 厚く御礼申し上げます.

また本論文の作成に当たって, ご多忙の中何度も本論文に目を通し, 細やかなご指摘の数々を頂いた教務助教の足立真訓さんに感謝申し上げます.

⁴擬円周領域に対してもこれらの領域は全て同値である.

目次

序文	i
本文中で用いられる記号の定義	viii
第 1 章 擬等角写像	1
1.1 曲線族モジュラス	1
1.2 極值的距離	5
1.3 擬等角写像	8
第 2 章 擬等角写像によって不変な性質	12
2.1 Riemann 面のクラス	12
2.2 Riemann 面間の擬等角写像	15
2.3 古典的な擬等角不変性	16
第 3 章 擬円板の幾何学的特徴づけ	19
3.1 擬円板	19
3.2 一様領域	20
3.3 LLC 領域	22
3.4 QED 領域	24
3.5 擬円板の幾何学的特徴づけ	26
3.6 Gehring–Martio の定理	28
第 4 章 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ との擬等角同値性について	35
4.1 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の擬等角変形	35
4.2 擬円板の一様性を用いた判定条件	36
4.3 予備的考察	39
4.4 極值的距離の考察により得られる判定法	41
REFERENCES	47

本文中で用いられる記号の定義

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数, 整数, 有理数, 実数, 複素数の全体とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し, \mathbb{R}^n は n 次元実 Euclid 空間を表し, $\bar{\mathbb{R}}^n$ は \mathbb{R}^n の一点コンパクト化を表す. また, \mathbb{C} の一点コンパクト化は $\hat{\mathbb{C}}$ と表し Riemann 球面と呼ぶ. このとき, 付け加える一点を ∞ で表し無限遠点と呼ぶ. 特に $\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ は, $z = x + iy$ によって $\mathbb{R}^2, \bar{\mathbb{R}}^2$ と同一視される. また, 拡張された実数直線は $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = [-\infty, +\infty]$ と表す.

位相空間 X の部分集合 Y に対して, ∂Y は Y の X 内での境界, \bar{Y} は Y の X 内での閉包を表す. 連結な開集合のことを領域と呼び, 連結であり 2 つ以上の元を持つコンパクト集合を連続体と呼ぶ.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ (または \mathbb{C}) の Euclid 距離は, $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ で表す. このとき, $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, $B_r^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ と定義し, 特に $B_1^n(0)$ は B^n と表す. さらに $S_r^{n-1}(x) = \partial B_r^n(x)$ とし, $S^{n-1} = S_1^{n-1}(0)$ とする. また $z \in \mathbb{C}$ に対しては, $D_r(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}$ と書き, $\mathbb{D} = D_1(0)$ を単位開円板と呼ぶ. さらに, $\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ を上半空間 ($n = 2$ のときは上半平面) と呼び, 複素平面でも同様に, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ を上半平面と呼ぶ.

部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $\text{diam}(A) = \sup \{|x - y| \mid x, y \in A\}$ を A の直径, $\text{dist}(A, B) = \inf \{|x - y| \mid x \in A, y \in B\}$ を A と B の距離と呼ぶ.

また, Riemann 面とは連結な一次元複素多様体のことを指す.

- ω_{n-1} 単位球面 S^{n-1} の $n - 1$ 次元面積 (= $n\Omega_n$)
- Ω_n 単位球 B^n の n 次元体積
- $\ell(\gamma)$ 曲線 γ の長さ (1.1 節参照)
- $\text{adm}(\mathcal{F})$ 曲線族 \mathcal{F} に対して許容された非負値 Borel 関数の全体 (1.1 節参照)
- $\text{mod}(\mathcal{F})$ 曲線族 \mathcal{F} のモジュラス (1.1 節参照)
- m (n 次元) Lebesgue 測度

- Jf 写像 f の Jacobi 行列,
特に $|Jf|$ は Jf の作用素ノルムを表す
- χ_Ω 集合 Ω に対する特性関数 (Example 1.1.2 参照)
- $\mathcal{F}^\Omega(E, F)$ コンパクト集合 E, F を領域 Ω 上で結ぶ求長可能曲線の全体
- $\delta^\Omega(E, F)$ Definition 1.2.1 参照
- c_n n のみに依存する定数 ($c_2 = 2/\pi$, Theorem 1.2.5 参照)
- $\gamma[z, w]$ 曲線 γ の部分曲線で $z, w \in \gamma$ を結ぶもの
- \mathcal{P} \mathbb{C} の離散集合 A で, $\mathbb{C} \setminus A$ が領域になるものの全体

第1章 擬等角写像

Ahlfors–Beurling [3] によって導入された極值的長さを考えることによって、擬等角写像が特徴付けられる。これは擬等角写像の幾何学的定義と呼ばれ現在では一般的によく知られていることである。この章では極值的長さの逆数として与えられる量、曲線族モジュラスを用いて擬等角写像を定義する。曲線族モジュラスは曲線族全体の上で定義された外測度を定めるなど、極值的長さに比べ扱いやすい性質を多く持つ。

1.1 曲線族モジュラス

Ω を \mathbb{R}^n の領域とする。閉区間 $[a, b]$ から Ω への非定値連続写像 γ 、またはその像を Ω 上の曲線と呼び、

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

がある実数値を持つとき、 γ は求長可能であるという¹。ここで右辺の上限は全ての有限分割 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ について取る。また $\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ を γ の端点と呼ぶ。

また開区間 (a, b) から Ω への非定値連続写像 γ 、またはその像も曲線と呼ばれ、任意の部分閉区間 $[c, d] \subset (a, b)$ への γ の制限が求長可能であるとき、 γ は局所求長可能であるという。さらに γ が局所求長可能であり、

$$\ell(\gamma) = \sup_{[c,d] \subset (a,b)} \ell(\gamma|_{[c,d]})$$

がある実数値を持つとき γ は求長可能であるという。

開区間 (a, b) 上で定義された求長可能曲線 γ は一意的に閉区間 $[a, b]$ 上で定義された曲線 $\tilde{\gamma}$ に拡張される ([28, Theorem 3.2] 参照)。このとき $\tilde{\gamma}(a)$ と $\tilde{\gamma}(b)$ を γ の端点と呼ぶ。

¹ $\ell(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt$ となるのは γ が絶対連続であるときに限る。以下、特に計算するときには、 γ が絶対連続であるものしか考えないため、こちらが $\ell(\gamma)$ の定義であると考えてよい。

次に Ω 上の曲線族 \mathcal{F} を一つ固定する.

$\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を非負値 Borel 関数とする. このとき ρ が曲線族 \mathcal{F} に対して許容された関数であるとは, 任意の局所求長可能曲線および求長可能曲線 $\gamma \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_{\gamma} \rho ds \geq 1$$

が成り立つことをいう. ただし $ds = \sqrt{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}$ は Euclid 距離に関する線素を表す. 曲線族 \mathcal{F} に対して許容された非負値 Borel 関数の全体を $\text{adm}(\mathcal{F})$ と表す. これらを用いて曲線族のある種の大きさを表す量, 曲線族モジュラスを定義する.

Definition 1.1.1 (曲線族モジュラス)

Ω を \mathbb{R}^n の領域とし, \mathcal{F} を Ω 上の曲線族とする. このとき次の量を曲線族 \mathcal{F} のモジュラスと呼ぶ².

$$\text{mod}(\mathcal{F}) = \inf_{\rho \in \text{adm}(\mathcal{F})} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dm = \inf_{\rho \in \text{adm}(\mathcal{F})} \int_{\Omega} \rho^n dm.$$

曲線族モジュラスは等角不変量である. つまり $h: \Omega \rightarrow h(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ を等角写像とし, Ω 上の曲線族 \mathcal{F} に対し $\mathcal{F}' = h(\mathcal{F}) = \{h \circ \gamma \mid \gamma \in \mathcal{F}\}$ と置けば, $\text{mod}(\mathcal{F}) = \text{mod}(\mathcal{F}')$ が成り立つ. 実際, 任意の $\rho' \in \text{adm}(\mathcal{F}')$ に対し, $\rho(x) = \rho'(h(x)) |Jh(x)|$ ($x \in \Omega$), $\rho(x) = 0$ ($x \notin \Omega$) と置けば, h の等角性³ から任意の $\gamma \in \mathcal{F}$ に対し次が成り立つ.

$$1 \leq \int_{h \circ \gamma} \rho' ds = \int_{\gamma} \rho ds.$$

つまり, $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F})$ となる. また, h の等角性から $|Jh(x)|^n = \det Jh(x)$ が成り立つため

$$\text{mod}(\mathcal{F}) \leq \int_{\Omega} \rho^n dm = \int_{\Omega'} \rho'^n dm.$$

つまり $\text{mod}(\mathcal{F}) \leq \text{mod}(\mathcal{F}')$ を得る. h^{-1} に同じ議論をすれば逆向きの不等式も得られる.

ここで, 曲線族モジュラスを計算するための基本的な手段をいくつか紹介する.

²二つ目の等号は証明すべきものであるが簡単であるため省略する.

³同相写像 $h: \Omega \rightarrow \Omega'$ が等角写像であるとは, i) h は C^1 級である. ii) Jacobi 行列 $Jh(x)$ は各 $x \in \Omega$ で 0 でない. iii) 任意の $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}^n$ に対して $|Jh(x)t| = |Jh(x)||t|$ が成り立つことをいう. ただし, $|Jh(x)|$ は $Jh(x)$ の作用素ノルムを表す.

Example 1.1.2

$0 < R_1 < R_2 < \infty$ とし, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$ とする. $c(\theta) = (R_1 + R_2) e^{i\theta}/2$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とホモトピックな Ω 上の曲線の全体 \mathcal{F} に対し, $\text{mod}(\mathcal{F})$ を求める.

まず, 任意の $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F})$ に対して

$$1 \leq \int_0^{2\pi} \rho(re^{i\theta}) r d\theta$$

が任意の $r \in (R_1, R_2)$ で成り立つ. 両辺を r で割り, $r \in (R_1, R_2)$ について積分すると,

$$\begin{aligned} \left(\log \frac{R_2}{R_1}\right)^2 &\leq \left(\int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \rho(re^{i\theta}) d\theta dr\right)^2 \\ &\leq \left(\int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \rho(re^{i\theta})^2 r d\theta dr\right) \left(\int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\theta dr\right) \\ &= 2\pi \log \frac{R_2}{R_1} \int_{\Omega} \rho(x+iy)^2 dx dy \end{aligned}$$

となる. ただし, 二つ目の不等号には Cauchy-Schwarz の不等式を用いた. 従って

$\frac{1}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1} \leq \text{mod}(\mathcal{F})$ を得る. 次に任意の $\gamma \in \mathcal{F}$ に対し

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

であるから, 両辺の絶対値を取り三角不等式を用いることによって,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{|z|} |dz| \geq 2\pi$$

を得る. 従って $\rho(z) = \chi_{\Omega}/2\pi|z|$ とすれば, $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F})$ であり, $\frac{1}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1} \geq \text{mod}(\mathcal{F})$ が得られる. ただし χ_{Ω} は次式で与えられ, Ω に対する特性関数と呼ばれる.

$$\chi_{\Omega}(z) = \begin{cases} 1 & (z \in \Omega), \\ 0 & (z \in \mathbb{C} \setminus \Omega). \end{cases}$$

以上より $\text{mod}(\mathcal{F}) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1}$ を得る.

また同様にして $R_1 = 0$ または $R_2 = +\infty$ であるとき $\text{mod}(\mathcal{F}) = +\infty$ となる.

Example 1.1.3

Ω を \mathbb{R}^n の有界な領域とし, \mathcal{F} を Ω 上の曲線族とする. このときもし任意の求長可能な $\gamma \in \mathcal{F}$ に対して, $l(\gamma) \geq l > 0$ が成り立つならば, $\frac{1}{l}\chi_\Omega \in \text{adm}(\mathcal{F})$ を考えることによって次の評価が得られる.

$$\text{mod}(\mathcal{F}) \leq \frac{m(\Omega)}{l^n}.$$

上記の曲線族モジュラスは Riemann 面上の概念に拡張できる. \mathcal{F} を Riemann 面 R 上の曲線族とする. 各座標近傍上で定義された非負値 Borel 関数の族 ρ で, 任意の座標変換に対して $\rho(z)|dz|$ が不変となるようなものを考える. このような ρ で任意の (各座標近傍で) 求長可能な曲線 $\gamma \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_\gamma \rho(z)|dz| \geq 1$$

を満たすようなものの全体を $\text{adm}(\mathcal{F})$ とし,

$$\text{mod}(\mathcal{F}) = \inf_{\rho \in \text{adm}(\mathcal{F})} \int_R \rho(x+iy)^2 dx dy$$

と定義する. Riemann 面上の曲線族モジュラス, および極值的長さについては [2] や [6], [37] を参照した.

曲線族モジュラスの逆数は極值的長さと呼ばれる量と一致する. 極值的長さは [3] によって導入され, 多くの応用が得られている非常に重要な量である. 極值的長さについては [2] などが詳しく扱っており, 曲線族モジュラスの性質については [31, chap. 2] に非常に詳しく解説されている. ここでの曲線族モジュラスの定義は [28, chap. 1] を参考にした.

次に, 曲線族モジュラスの基本的かつ重要な性質である次の定理を証明する.

Theorem 1.1.4

曲線族モジュラス mod は, 領域または Riemann 面 Ω 上の曲線族の全体の上で定義された外側度を定める. 即ち以下の条件が成り立つ.

- $\text{mod}(\emptyset) = 0$.
- $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ならば $\text{mod}(\mathcal{F}) \leq \text{mod}(\mathcal{F}')$.
- $\text{mod}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mod}(\mathcal{F}_i)$.

証明

$0 \in \text{adm}(\emptyset)$ であるから $\text{mod}(\emptyset) = 0$ である. また, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ならば $\text{adm}(\mathcal{F}') \subset \text{adm}(\mathcal{F})$ であるから $\text{mod}(\mathcal{F}) \leq \text{mod}(\mathcal{F}')$ を得る.

最後に三つ目の不等式を示す. ある i に対して $\text{mod}(\mathcal{F}_i) = +\infty$ なら不等式は正しいから, 任意の i に対して $\text{mod}(\mathcal{F}_i) < +\infty$ とする. 任意に $\varepsilon > 0$ をとり, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $\rho_i \in \text{adm}(\mathcal{F}_i)$ で

$$\int_{\Omega} \rho_i^n dm < \text{mod}(\mathcal{F}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

を満たすものをとる. ここで $\rho = (\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i^n)^{1/n}$ とすれば $\rho \in \text{adm}(\bigcup \mathcal{F}_i)$ であり, Lebesgue の単調収束定理から

$$\text{mod}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i\right) \leq \int_{\Omega} \rho^n dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} \rho_i^n dm < \sum_{i=1}^{\infty} \text{mod}(\mathcal{F}_i) + \varepsilon$$

が成り立つ. $\varepsilon \rightarrow 0$ として主張を得る. □

1.2 極値的距離

ここでは二つのコンパクト集合, 特に連続体に対して極値的距離という量を定義する. 極値的距離は二つのコンパクト集合を固定したとき, そのコンパクト集合を含む領域にも依存して変化する量である. そこで考えたい領域と, より広い領域との極値的距離を比較することによって, ある重要な領域を特徴づけることができる. これについては第3章で詳しく述べる. また本節の内容は [31, chap. 2], [28, chap. 1] を参考にした.

Definition 1.2.1 (極値的距離)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とし, $E, F \subset \Omega$ を共通部分をもたないコンパクト集合とする. ここで, Ω 上の求長可能曲線で E と F を結び, つまり一方の端点が E に属しもう一方の端点が F に属すものの全体を $\mathcal{F}^{\Omega}(E, F)$ とおく. このとき

$$\delta^{\Omega}(E, F) = \text{mod}(\mathcal{F}^{\Omega}(E, F))$$

を E と F の Ω 上での極値的距離と呼ぶ.

Example 1.2.2

$0 < R_1 < R_2 < +\infty$ に対し, $\delta^{\mathbb{R}^n}(S_{R_1}^n(0), S_{R_2}^n(0))$ を計算する.

$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(S_{R_1}^n(0), S_{R_2}^n(0))$ とおいたとき, 任意の $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F})$ と $x \in S^n$ に対し,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho(rx) dr \right)^n \\ &\leq \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho(rx)^n r^{n-1} dr \right) \left(\int_{R_1}^{R_2} r^{-1} dr \right)^{n-1} \\ &= \left(\log \frac{R_2}{R_1} \right)^{n-1} \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho(rx)^n r^{n-1} dr \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし2つ目の不等号には Hölder の不等式を使った. 従って, 両辺を x について S^n 上で積分すれば

$$\omega_{n-1} \leq \left(\log \frac{R_2}{R_1} \right)^{n-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dm \right)$$

を得る. $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F})$ は任意なので

$$\text{mod}(\mathcal{F}) \geq \omega_{n-1} \left(\log \frac{R_2}{R_1} \right)^{1-n}$$

を得るが, Example 1.1.2 と同様に $\rho = \chi_{\Omega}/|x| \log(R_2/R_1) \in \text{adm}(\mathcal{F})$ を考えれば,

$$\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(S_{R_1}^n(0), S_{R_2}^n(0)) = \text{mod}(\mathcal{F}) = \omega_{n-1} \left(\log \frac{R_2}{R_1} \right)^{1-n}$$

が得られる.

同様にして $\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(\{0\}, S_{R_2}^n(0)) = 0$ および $\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(S_{R_1}^n(0), \{+\infty\}) = 0$ も得られる.

Example 1.2.2 は極値的距離を上から評価するための基本的な道具となる. 例えば Example 1.2.2 より次の二つの命題を得る. 証明は共に [28] を参考にした.

Proposition 1.2.3 (モジュラス0の曲線族)

Ω を $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域または Riemann 面とし, \mathcal{F} を Ω 上の曲線族とする. 各点 $x \in \Omega$ に対して $\mathcal{F}_x = \{\gamma \in \mathcal{F} \mid x \in \gamma\}$ とおく. このとき $\text{mod}(\mathcal{F}_x) = 0$ である.

証明

まず Ω が $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域の場合に証明する. $k \in \mathbb{N}$ に対して, $\gamma \in \mathcal{F}_x$ で $S_{1/k}^n(x)$ と交わるようなものの全体を \mathcal{F}_x^k とおく. このとき任意の $\gamma \in \mathcal{F}_x^k$ は $\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(\{x\}, S_{1/k}^n(x))$ に属す部分曲線 γ' を持つので, 任意の $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(\{x\}, S_{1/k}^n(x)))$ に対して

$$1 \leq \int_{\gamma'} \rho ds \leq \int_{\gamma} \rho ds$$

が成り立つ. つまり $\text{adm}(\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(\{x\}, S_{1/k}^n(x))) \subset \text{adm}(\mathcal{F}_x^k)$ であるから

$$\text{mod}(\mathcal{F}_x^k) \leq \text{mod}(\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(\{x\}, S_{1/k}^n(x))) = \delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(\{x\}, S_{1/k}^n(x))$$

を得る. 従って Example 1.2.2 より $\text{mod}(\mathcal{F}_x^k) = 0$ が得られ, Theorem 1.1.4 より

$$0 \leq \text{mod}(\mathcal{F}_x) = \text{mod}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_x^k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{mod}(\mathcal{F}_x^k) = 0$$

つまり, $\text{mod}(\mathcal{F}_x) = 0$ を得る.

Ω が Riemann 面の時は x の座標近傍 (U, z) を一つ固定して, 曲線族 $\{\gamma \cap U \mid \gamma \in \mathcal{F}_x\}$ に対して同様の議論をすればよい. \square

Proposition 1.2.4

$E, F \subset \mathbb{R}^n$ を互いに交わらない連続体とする.

このとき, E と F が $B_{R_2}^n(x) \setminus \bar{B}_{R_1}^n(x)$ によって分離されるとき以下が成り立つ.

$$\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F) \leq \omega_{n-1} \left(\log \frac{R_2}{R_1} \right)^{1-n}$$

ただし $0 < R_1 < R_2 < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ とする.

証明

$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F)$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(S_{R_1}^n(x), S_{R_2}^n(x))$ とし, 任意に $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F}')$ をとる. このとき, 任意の $\gamma \in \mathcal{F}$ は \mathcal{F}' に属す部分曲線 γ' を持つから, Proposition 1.2.3 と同様にして

$$\text{mod}(\mathcal{F}) \leq \text{mod}(\mathcal{F}')$$

を得る. 従って Example 1.2.2 より主張を得る. \square

一方で極值的距離を下から評価するのは非常に難しい. 極值的距離を下から評価をするための基本的な定理として [28, Theorem 10.12] が挙げられるが, これを証明するにも多くの準備が必要である. 下からの評価については [28, Theorem 10.12] を始めとして多くの研究があるが, 現在では次の非常に強力な評価式が得られている. 証明は [31, sec. 5-7] または, [30], [32], [12] を見よ.

Theorem 1.2.5 (M. Vuorinen [32] Lemma 4.7 (1988))

$E, F \subset \mathbb{R}^n$ を互いに交わらない連続体とする. このとき

$$\delta_{\mathbb{R}^n}(E, F) \geq c_n \log \left(1 + \frac{\min \{ \text{diam}(E), \text{diam}(F) \}}{\text{dist}(E, F)} \right)$$

が成り立つ. ただし, c_n は n のみに依存する正の定数であり, $c_2 = 2/\pi$ である.
([31, Lemma 7.38] 参照)

1.3 擬等角写像

前節の曲線族モジュラスを用いて擬等角同相写像を定義する. この定義は擬等角同相写像の幾何学的定義と呼ばれる ([28] 参照).

Definition 1.3.1 (擬等角同相写像)

Ω, Ω' を \mathbb{R}^n の領域, または Riemann 面とする. $K \geq 1$ に対して, 向きを保つ同相写像 $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ が K 擬等角同相写像 (quasi-conformal mapping, q.c.) であるとは, 任意の Ω 上の曲線族 \mathcal{F} に対して

$$\frac{1}{K} \text{mod}(\mathcal{F}) \leq \text{mod}(f(\mathcal{F})) \leq K \text{mod}(\mathcal{F})$$

が成り立つことをいう. また f が単に擬等角同相写像であるとは, ある $K \geq 1$ に対して f が K 擬等角同相写像であることとし, Ω, Ω' の間に擬等角同相写像が存在する時, Ω と Ω' は擬等角同相であるという. また, 擬等角同相写像を略して擬等角写像と呼ぶことがある.

前節の補足から, 等角写像は 1- q.c. である. また逆も正しい. さらに定義から直ちに次の命題が従うことがわかる.

- $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ が K_1 -q.c. であり, $g : \Omega' \rightarrow \Omega''$ が K_2 -q.c. であるとき, $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega''$ は $K_1 K_2$ -q.c. である.
- $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ が K -q.c. であるとき, $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ も K -q.c. である.

従って, Ω と Ω' が擬等角同相であるという関係は, ひとつの同値関係を定めることがわかる. この意味で擬等角同相であることを擬等角同値であるという事がある.

擬等角同相写像の特徴付けについては, 幾何学的なものだけでなく解析的なものも数多くある. 例えば [16] には多くの特徴付けについて詳しく解説されている. 擬等角写像はその豊富な特徴付けによって様々な性質が知られている. 上記の幾何学的な定義によれば, 上述した擬等角同相性が同値関係を定めるという事実を簡単に確認できる他に, 次の重要な命題を簡潔に示すことができる. 証明は [28, pp. 52-53] を参考にした.

Theorem 1.3.2 (puncture の除去可能性)

Ω, Ω' を \mathbb{R}^n の領域とし, $p \in \partial\Omega$ を孤立点とする. このとき任意の K 擬等角写像 $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ に対して

$$\lim_{z \rightarrow p} f(z) = p'$$

が存在して $p' \in \partial\Omega'$ は孤立点である. さらに f は $f(p) = p'$ とすることによって, $\Omega \cup \{p\}$ から $\Omega' \cup \{p'\}$ への K 擬等角写像に拡張される.

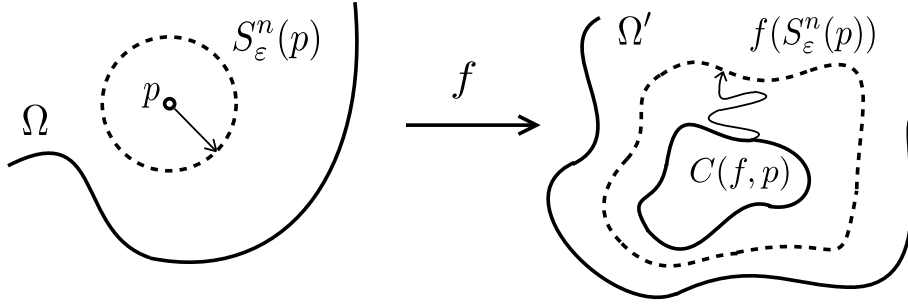
証明

$\varepsilon > 0$ を十分小さく取り, $\bar{B}_\varepsilon^n(p) \cap \partial\Omega = \{p\}$ となるようにする. ここで $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}^{\mathbb{R}^n}(\{p\}, S_\varepsilon^n(p))$ とし, $\mathcal{F}_{R'} = f(\mathcal{F}_R)$ とする. このとき Example 1.2.2 より $\text{mod}(\mathcal{F}_R) = 0$ であり, f の擬等角性から

$$\text{mod}(\mathcal{F}_{R'}) \leq K \text{mod}(\mathcal{F}_R) = 0$$

つまり $\text{mod}(\mathcal{F}_{R'}) = 0$ を得る. $\mathcal{F}_{R'}$ は $f(S_\varepsilon^n(p))$ と集積値集合⁴ $C(f, p)$ を結ぶ曲線の全体であるから $\delta^{\mathbb{R}^n}(C(f, p), f(S_\varepsilon^n(p))) = 0$ を得る. このときもし $\text{diam}(f(S_\varepsilon^n(p))) > 0$ かつ $\text{diam}(C(f, p)) > 0$ ならば Theorem 1.2.5 から矛盾が起こる. 従って, $\text{diam}(f(S_\varepsilon^n(p))) = 0$ または $\text{diam}(C(f, p)) = 0$ であるが, 明らかに $\text{diam}(f(S_\varepsilon^n(p))) \neq 0$ なので $\text{diam}(C(f, p)) = 0$ となる. つまり $C(f, p)$ は一点から成る.

⁴ \mathbb{R}^n の点 q で, $f(p_n)$ が q に収束するように p に収束する点列 $\{p_n\} \subset \Omega$ をとれるものの全体を $C(f, p)$ と書き集積値集合 (cluster set) と呼ぶ.



以上から $C(f, p)$ の元を p' とすれば f は $\Omega \cup \{p\}$ から $\Omega' \cup \{p'\}$ への同相写像に拡張される. これが K 擬等角写像であることを示す. 任意の $\Omega \cup \{p\}$ 上の曲線族 \mathcal{F} に対して, $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$ とおく. \mathcal{F} の曲線で p を通るものの全体を \mathcal{F}_p とすれば, Proposition 1.2.3 より $\text{mod}(\mathcal{F}_p) = 0$ である. 一方 \mathcal{F}' の曲線で p' を通るものの全体を $\mathcal{F}'_{p'}$ とすると $f(\mathcal{F}_p) = \mathcal{F}'_{p'}$ であり, 同様に Proposition 1.2.3 から $\text{mod}(\mathcal{F}'_{p'}) = 0$ を得る. よって Theorem 1.1.4 より

$$\begin{aligned} \text{mod}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_p) &\leq \text{mod}(\mathcal{F}) \leq \text{mod}(\mathcal{F}_p) + \text{mod}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_p) = \text{mod}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_p), \\ \text{mod}(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}'_{p'}) &\leq \text{mod}(\mathcal{F}') \leq \text{mod}(\mathcal{F}'_{p'}) + \text{mod}(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}'_{p'}) = \text{mod}(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}'_{p'}). \end{aligned}$$

つまり $\text{mod}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_p) = \text{mod}(\mathcal{F})$ および $\text{mod}(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}'_{p'}) = \text{mod}(\mathcal{F}')$ を得る. $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_p$ は $\Omega \cup \{p\}$ 上の曲線族であり, $f(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_p) = \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}'_{p'}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \text{mod}(\mathcal{F}) &= \frac{1}{K} \text{mod}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_p) \leq \text{mod}(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}'_{p'}) \\ &= \text{mod}(\mathcal{F}') \leq K \text{mod}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_p) \leq K \text{mod}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

を得る. つまり拡張された f も K 擬等角写像である. \square

(注意1) この命題を証明するために Theorem 1.2.5 を用いたが, Theorem 1.2.5の方が証明ははるかに難しい. 実際 [28] では別の方法で $C(f, p)$ が一点から成ることを証明している. 特に $n = 2$ の場合, つまり Ω が \mathbb{C} の領域の場合には, 任意の円環領域がある $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$ に対して $\{R_1 < |z| < R_2\}$ と等角同値であることと, Riemann の除去可能性定理を使えば, より簡単に $C(f, p)$ が一点から成ることを示せる.

(注意2) この定理を可算無限個の punctures に対して適応する事を考える. このとき上の Theorem 1.3.2 より明らかに f は同相写像に拡張することができるが, これが K 擬等角写像になるかということが問題になる. 証明の後半で用いた Theorem 1.1.4 は可算無限個の曲線族に対して適応で

きるから, p_1, p_2, \dots を punctures とし証明と同様に \mathcal{F}_{p_i} を定めれば

$$\begin{aligned} \text{mod} \left(\mathcal{F} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{p_i} \right) &\leq \text{mod}(\mathcal{F}) \\ &\leq \text{mod} \left(\mathcal{F} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{p_i} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \text{mod}(\mathcal{F}_{p_i}) \\ &= \text{mod} \left(\mathcal{F} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{p_i} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. \mathcal{F}' に対しても同様にできるので, 結局可算無限個の punctures も擬等角写像に対して除去可能であることが示せる.

この Theorem 1.3.2 により, 例えば単位円板 \mathbb{D} と全平面 \mathbb{C} が擬等角同相でないことがわかる. なぜなら \mathbb{C} は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から一点 ∞ を除いた Riemann 面であるため, 上の命題から任意の擬等角写像に対して ∞ は除去可能である⁵. しかし単位円板 \mathbb{D} の境界は孤立点を持たないため, もし \mathbb{C} から \mathbb{D} への擬等角写像が存在したら矛盾が起こるからである. 一方で \mathbb{D} と \mathbb{C} は可微分同相である.

このように擬等角写像は Riemann 面あるいは空間領域を変形し過ぎないという一面を持つ. 特に擬等角写像は被覆面間の擬等角写像に持ち上げることがわかるため, Riemann 面の普遍被覆面 ($\hat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} または \mathbb{D} . [34], [37] などを参照) は擬等角変形によって保存される. この性質は Riemann 面の変形を考えるためには非常に有効である. Teichmüller 空間は Riemann 面の擬等角写像による変形を記述するための空間である.

⁵擬等角写像の定義から, Riemann 面間の擬等角写像は各座標近傍上で中への擬等角同相写像となっていることに注意する.

第2章 擬等角写像によって不変な性質

1.3節では与えられた Riemann 面の普遍被覆面 ($\hat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} または \mathbb{D}) が擬等角写像によって不変であることを説明した. この章ではその他の, Riemann 面の擬等角不変な性質について古典的な結果を説明する. 特に Riemann 面の等角不変な性質として古くからよく知られているもので, 同時に擬等角不変な性質となるようなものについて述べる.

2.3節で述べる A. Pfluger による結果 [23] は Green 関数を持たないという性質が擬等角不変であることを主張するものである. つまり, Riemann 面のクラス O_G は擬等角不変である. \mathbb{C} は Green 関数を持たないのに対し, \mathbb{D} は Green 関数を持つため, これより \mathbb{C} と \mathbb{D} は擬等角同相でないことがわかる. つまり, この結果は 1.3節で述べた Riemann 面の普遍被覆面の擬等角不変性の一般化であるといえる.

2.1 Riemann 面のクラス

R を開 Riemann 面とし, $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正則近似列とする. つまり, 各 R_n は R の相対コンパクトな領域であり以下の条件を満たすものである.

- i. ∂R_n は互いに交わらない有限個の解析的 Jordan 閉曲線からなる.
- ii. $\bar{R}_n \subset R_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$).
- iii. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n = R$.
- iv. $R \setminus R_n$ の各連結成分はコンパクトでない.

正則近似列の存在については [37, pp. 84-85] を参照.

関数 $g_n : R_n \times R_n \rightarrow \mathbb{R}$ が R_n の Green 関数であるとは以下の性質を満たすことをいう.

- i. 各 $q \in R_n$ に対し, $g_n^q(p) = g_n(p, q)$ は $R_n \setminus \{q\}$ で調和で, q の局所近傍において $p \leftrightarrow z, q \leftrightarrow \zeta$ と対応するとき $-\log|z - \zeta|$ の特異性を持つ.
- ii. $g_n(p, q) = 0$ が任意の $p \in \partial R_n, q \in R_n$ で成り立つ.

さらに $n > 1$ に対して, 次の境界値条件に対する Dirichlet 問題の解, すなわち境界値条件を満たす調和関数 $u_n : R_n \setminus R_1 \rightarrow \mathbb{R}$ を ∂R_n の $R_n \setminus R_1$ における調和測度と呼ぶ.

$$u_n(p) = \begin{cases} 1 & (p \in \partial R_n) \\ 0 & (p \in \partial R_1). \end{cases}$$

また, この u_n に対し $d_n = \int_{R_n \setminus R_1} |\nabla u_n|^2 dx dy$ とおく.

さて $\{g_n\}_{n=1}^\infty, \{u_n\}_{n=2}^\infty$ に対して, 調和関数の最大値の原理と Harnack の原理を用いると

$$g_R(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(p, q) \quad p, q \in R$$

は調和関数または恒等的に $+\infty$ の関数であり,

$$u_R(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(p) \quad p \in R \setminus R_1$$

は調和関数または恒等的に 0 の関数である. (それぞれの収束は広義一様である.) また, $\{d_n\}$ は単調減少する正数列となることからわかるため, $d_R = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n (\geq 0)$ が存在する.

g_R が恒等的に $+\infty$ でないとき, g_R は R の Green 関数と呼ばれる. Green 関数は近似列のとり方に依らない. また g_R が恒等的に $+\infty$ となるとき R は Green 関数を持たないと言い, R が Green 関数をもたないことを $R \in O_G$ と書く.

u_R は R の理想境界の調和測度と呼ばれる. u_R はもちろん近似列のとり方によって異なるが, 恒等的に 0 となるかどうかは近似列のとり方には依存しない.

実は, R が Green 関数を持たないこと, 調和測度 u_R が恒等的に 0 であること, $d_R = 0$ であることは全て同値である. ここでは 2.3 節のために次の命題のみ証明する. 以上の内容と次の命題については [37, pp. 257-259] を参照した.

Proposition 2.1.1

$$R \in O_G \iff d_R = 0.$$

証明

Stokes の定理より次が成り立つ.¹

$$\begin{aligned} d_n &= \int_{R_n \setminus R_1} |\nabla u_n|^2 dx dy = \int_{R_n \setminus R_1} du_n \wedge *du_n \\ &= \int_{\partial R_n} u_n *du_n - \int_{\partial R_1} u_n *du_n \\ &= \int_{\partial R_n} *du_n = \int_{\partial R_1} *du_n. \end{aligned}$$

次に $q \in R_1$ を一つ固定し $g_n(p, q)$ と $u_n(p)$ に Green の公式を用いると,

$$\int_{\partial R_1} g_n *du_n = - \int_{\partial R_n} *dg_n = \int_{|z|=\varepsilon} *d \log |z| = 2\pi$$

が得られる. 一方で $\partial/\partial\nu$ を ∂R_1 の外向き法線微分とすると, $R_n \setminus R_1$ 上で $u_n > 0$, ∂R_1 上で $u_n = 0$ であるから, ∂R_1 上で $\partial u_n / \partial \nu \geq 0$ が成り立つ. さらに, $*du_n = (\partial u_n / \partial \nu) ds$ であるから

$$\min_{p \in \partial R_1} g_n(p) \leq \frac{\int_{\partial R_1} g_n *du_n}{\int_{\partial R_1} *du_n} \leq \max_{p \in \partial R_1} g_n(p).$$

従って, 中間値の定理より

$$g_n(p_n, q) = \frac{\int_{\partial R_1} g_n *du_n}{\int_{\partial R_1} *du_n} = \frac{2\pi}{d_n}$$

を満たす $p_n \in R_1$ が存在する. ここで $\{p_n\} \subset \partial R_1$ の収束する部分列をとり, その収束先を $p_0 \in \partial R_1$ とすれば

$$g_R(p_0, q) = \frac{2\pi}{d_R}$$

が得られる. 従って $g_R \equiv +\infty$ であれば $d_R = 0$ でなければならず, 逆に $d_R = 0$ ならば $g_R \equiv +\infty$ でなければならない. \square

¹ $\omega = adx + bdy$ に対し, $*\omega = -bdx + ady$ とし ω の共役微分と呼ぶ.

R が Green 関数を持たない (あるいは持つ) という性質は等角写像によって保存される. つまり Riemann 面 R' が $R \in O_G$ と等角同値であるなら $R' \in O_G$ である. このようにある性質を持つ関数が Riemann 面上に存在するかどうかによって, Riemann 面を分類するという考え方が他にも多く存在する. 例えば R 上の非定数調和関数で, その Dirichlet 積分が有限な値を持つようなものが存在しないとき, $R \in O_{HD}$ と書く. また, R 上の非定数調和関数で有界なものが存在しないとき $R \in O_{HB}$ と書く. このときも Riemann 面のクラス O_{HD} , O_{HB} は等角不変である. この種の Riemann 面のクラスについては [37, 8.3 節] にまとめられている.

2.2 Riemann 面間の擬等角写像

第 1 章で Riemann 面間の擬等角写像はすでに定義しているが, この章の内容にあった解析的定義と呼ばれる方法でもう一度 Riemann 面間の擬等角写像を定義する.

R, R' を Riemann 面とする. Riemann 面間の向きを保つ同相写像 $f : R \rightarrow R'$ が, ほとんど至る所で偏微分可能であるとする. このとき,

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z) d\bar{z}}{f_z(z) dz}$$

で与えられる $(-1, 1)$ 形式を f の Beltrami 係数 (あるいは Beltrami 微分) と呼ぶ. Beltrami 係数 μ_f に対し $|\mu_f|(z) = |\mu_f(z)|$ とすれば, 容易に $|\mu_f|$ は R 上の関数を定めることがわかる. ここで,

$$\|\mu_f\|_\infty = \text{ess.sup} \{|\mu_f|(z) \mid z \in R\}$$

は f の最大歪曲係数と呼ばれ,

$$K(f) = \frac{1 + \|\mu_f\|_\infty}{1 - \|\mu_f\|_\infty}$$

は f の最大歪曲率と呼ばれる.

Definition 2.2.1 (Riemann 面間の擬等角写像)

R, R' を Riemann 面とし, $K \geq 1$ とする. このとき向きを保つ同相写像 $f : R \rightarrow R'$ が K 擬等角写像であるとは, 以下の条件を満たすこととする.

- f はほとんど至る所で偏微分可能であり, $f_z, f_{\bar{z}}$ は局所可積分である.
- $K(f) \leq K$ が成り立つ.

二つ目の条件よりほとんど至る所で以下が成り立つ.

$$|f_{\bar{z}}(z)| \leq k|f_z(z)|, \quad k = \frac{K-1}{K+1}.$$

また擬等角写像は積分の変数変換が可能である. すなわち任意の可測集合 $E \subset R$ に対して次が成り立つ. ただし $f(z) = f(x+iy) = u+iv$ とする.

$$\int_{f(E)} dudv = \int_E \det Jf(x+iy) dx dy.$$

この解析的定義はもちろん第1章で紹介した幾何学的定義と一致する. これらの事実は例えば [34], [6], [2] など多くのテキストで扱われている. ここでの解析的定義についてもこれらを参考にした.

2.3 古典的な擬等角不変性

この節ではまず Pfluger [23] の証明に沿って, Riemann 面のクラス O_G が擬等角不変であることを示す.

Theorem 2.3.1 (A. Pfluger [23] (1948))

R, R' を Riemann 面とする. R と R' が擬等角同相ならば

$$R \in O_G \quad \iff \quad R' \in O_G.$$

証明

$f: R \rightarrow R'$ を $(1+k)/(1-k)$ 擬等角写像とし, $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を R の正則近似列とする. $R'_n = f(R_n)$ とすれば $\{R'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は R' の正則近似列になる. ここで, 近似列 $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{R'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対応する調和測度の列をそれぞれ $\{\omega_n\}_{n=2}^\infty$, $\{\omega'_n\}_{n=2}^\infty$ とする (2.1 節参照). また, $\Omega_n = \omega_n \circ g$, $g = f^{-1}$ とおき, 以下では R の局所変数を $z = x+iy$, R' の局所変数は $w = u+iv$ で表す. まず,

$$\begin{aligned} |\nabla \Omega_n(w)|^2 &= 4 \left| \frac{\partial \Omega_n}{\partial w} \right|^2 \\ &= 4 \left| \frac{\partial \omega_n}{\partial z} \circ g \frac{\partial g}{\partial w} + \frac{\partial \omega_n}{\partial \bar{z}} \circ g \frac{\partial \bar{g}}{\partial w} \right|^2 \\ &\leq 4 \left(\left| \frac{\partial \omega_n}{\partial z} \circ g \right| \left| \frac{\partial g}{\partial w} \right| + \left| \frac{\partial \omega_n}{\partial \bar{z}} \circ g \right| \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \right| \right)^2 \\ &\leq 4(1+k)^2 \left| \frac{\partial g}{\partial w} \right|^2 \left| \frac{\partial \omega_n}{\partial z} \circ g \right|^2 = (1+k)^2 \left| \frac{\partial g}{\partial w} \right|^2 |\nabla \omega_n(g(w))|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ². 次に,

$$\begin{aligned}
1 &= \left| \frac{\partial g \circ f}{\partial z} \right|^2 = \left| \frac{\partial g}{\partial z} \circ f \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right|^2 \\
&\geq \left(\left| \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right| \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f \right| \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right| \right)^2 \\
&\geq \left(\left| \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right| \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - k^2 \left| \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right| \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \right)^2 \\
&= (1 - k^2)^2 \left| \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right|^2 \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 \\
&\geq (1 + k)^2 (1 - k)^2 \left| \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right|^2 \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right|^2 \right) \geq (1 - k)^2 \left| \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right|^2 \det Jf.
\end{aligned}$$

つまり,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right|^2 \det Jf \leq \frac{1}{(1 - k)^2}$$

が得られる. 従って以上より,

$$\begin{aligned}
\int_{R'_n \setminus R'_1} |\nabla \Omega_n(w)|^2 dudv &\leq (1 + k)^2 \int_{R'_n \setminus R'_1 = f(R_n \setminus R_1)} |\nabla \omega_n(g(w))|^2 \left| \frac{\partial g}{\partial w} \right|^2 dudv \\
&= (1 + k)^2 \int_{R_n \setminus R_1} |\nabla \omega_n(z)|^2 \left| \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right|^2 \det Jf dx dy \\
&\leq \frac{(1 + k)^2}{(1 - k)^2} \int_{R_n \setminus R_1} |\nabla \omega_n(z)|^2 dx dy \\
&= K^2 \int_{R_n \setminus R_1} |\nabla \omega_n|^2 dx dy
\end{aligned}$$

を得る. ただし $K = (1 + k)/(1 - k)$ とする.

一方, Dirichlet の原理により,

$$\int_{R'_n \setminus R'_1} |\nabla \omega'_n(w)|^2 dudv \leq \int_{R'_n \setminus R'_1} |\nabla \Omega_n(w)|^2 dudv$$

であるから,

$$\int_{R'_n \setminus R'_1} |\nabla \omega'_n(w)|^2 dudv \leq K^2 \int_{R_n \setminus R_1} |\nabla \omega_n|^2 dx dy.$$

つまり, $n \rightarrow \infty$ として $d_{R'} \leq K^2 d_R$ を得る ($d_R, d_{R'}$ は 2.1 節で定義した).

² $\left| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \right| \leq k \left| \frac{\partial g}{\partial w} \right| < \left| \frac{\partial g}{\partial w} \right|$, $\left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right| \leq k \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| < \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|$ が成り立つ.

従って, $R \in O_G$ ならば Proposition 2.1.1 により $d_R = 0$ となり, $d_{R'} = 0$, つまり $R' \in O_G$ を得る. f^{-1} に対して同様の議論をすれば主張を得る. \square

以上から Green 関数を持たないという性質は擬等角不変であることが示された. ところで $R \in O_G$, つまり R が Green 関数を持たない場合については次の定理が有名である.

Theorem 2.3.2 (M. Nakai [20] (1962))

$R \in O_G$ とし, $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は R の正規近似列で $R \setminus \bar{R}_1$ が連結になるようなものとする. このとき, $R \setminus \bar{R}_1$ で調和な関数 u で以下の条件を満たすものが存在する.

- $u(p) = 0$ が任意の $p \in \partial R_1$ で成り立つ.
- $\int_{\partial R_1} *du = 2\pi$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{p \in R \setminus \bar{R}_n} u(p) = +\infty$.

この定理と Sario の定理 [26] (1952) を合わせることにより, $R \in O_G$ には Evans-Selberg ポテンシャルが存在することが示される. ここで, $q \in R$ を固定したとき関数 $P : R \rightarrow \mathbb{R}$ が q を極に持つ Evans-Selberg ポテンシャルであるとは

- i. P は $R \setminus \{q\}$ で調和である.
- ii. q を中心とする局所円板において P は $\log |z|$ の特異性を持つ.
- iii. $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を R の正規近似列とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{p \in R \setminus \bar{R}_n} P(p) = +\infty.$$

を満たすことである.

また逆に, R が Evans-Selberg ポテンシャルを持つときには $R \in O_G$ となることは容易に示せる. つまり, R が Green 関数を持たないための必要十分条件は Evans-Selberg ポテンシャルを持つことである. 従って, “ Evans-Selberg ポテンシャルを持つ ” という性質も擬等角不変である.

クラス O_{HD} に対してもこの種類の擬等角不変性が成り立つ. つまり, Riemann 面 R' が $R \in O_{HD}$ と擬等角同相であるなら $R' \in O_{HD}$ となる. クラス O_{HD} の擬等角不変性は 1954 年に Royden [25] が証明し, より一般に Royden 写像によっても不変であることが Nakai [21] (1966) によって示された.

第3章 擬円板の幾何学的特徴づけ

第4章の証明では擬円板が重要な役割を果たす。擬円板の研究は非常に膨大であるが、Gehring が [8] にその多くをまとめており、特に擬円板の特徴づけについては 20 あまりも紹介されている。擬円板の特徴付けには幾何学的性質を用いられるものが多く、本章でも代表的な 3 つの幾何学的特徴づけを扱う。一方、Sobolev 拡張性や BMO 拡張性などの解析的な性質についても多くの結果が得られている。

また擬円板での研究を擬円周領域へ一般化する研究や、高次元、すなわち擬球面領域へ一般化する研究も多くある。この章では擬球面領域でも成り立つ結果について一部証明も含め紹介する。

3.1 擬円板

擬等角写像の擬等角拡張性、即ち二領域間の擬等角写像が $\hat{\mathbb{C}}$ や $\bar{\mathbb{R}}^n$ の自己擬等角写像に拡張できるかどうか、は Ahlfors [1] を始めとして古くから研究されてきた。二領域が $\hat{\mathbb{C}}$ や $\bar{\mathbb{R}}^n$ の自己擬等角写像によって移り合うという性質はそれらの領域について調べるためには非常に有益で、このような領域の基本的なものとして擬円板が考えられる。

Definition 3.1.1 (擬円板, 擬円周領域)

Ω を $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域とする。 Ω がある擬等角写像 $f : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ によって

$$\Omega = f(B^n)$$

と書けるとき Ω を擬球、特に $n = 2$ の場合は擬円板と呼ぶ。また、

$$\partial\Omega = f(S^{n-1})$$

は擬球面、特に $n = 2$ の場合は擬円周と呼ぶ。

また $\bar{\mathbb{R}}^n$ の真部分領域 Ω の各境界成分がそれぞれ 1 点であるか擬球面 ($n = 2$ の場合は擬円周) であるとき、 Ω は擬球面領域 ($n = 2$ の場合は擬円周領域) であると言う。

$\bar{\mathbb{R}}^n$ の Möbius 変換 $f \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ は $\bar{\mathbb{R}}^n$ の自己1擬等角写像である. 従って, 任意の $f \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ に対して $f(B^n)$ は擬球 ($n = 2$ の場合は擬円板) である. このことから特に, 上半平面 \mathbb{H} および上半空間 \mathbb{H}^n ($n > 2$) はそれぞれ擬円板, 擬球であることがわかる.

上半平面および上半空間は \mathbb{R}^n の非有界な擬円板, 擬球の典型例である. 次節以降では様々な性質を備える平面 (空間) 領域を考えていくが, 擬円板 (擬球) を特徴づけるためには, 非有界な領域, あるいは $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域に対しても正しくその性質を表すように条件を与えなければならない.

3.2 一様領域

領域内の二点がある一定の条件を満たす曲線によって結ばれる, という条件によって領域を特徴づけることがよくある. この節ではその一例として一様領域を定義する.

Ω を \mathbb{R}^n の領域とする. Ω が $c \geq 1$ に対して c 擬凸領域であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in \Omega$ に対して x_1 と x_2 を端点に持つ Ω 上の求長可能曲線 γ で $\ell(\gamma) \leq c |x_1 - x_2|$ を満たすものが存在することを言う. 1 擬凸領域は任意の二点が領域内で Euclid 線分によって結ばれる事を表す. つまり 1 擬凸性と一般の凸性は一致する.

次に Ω が $c \geq 1$ に対して c -John 領域であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in \Omega$ に対して x_1 と x_2 を端点に持つ Ω 上の求長可能曲線 γ であって, 任意の $x \in \gamma$ に対し

$$\min_{j=1,2} \ell(\gamma[x, x_j]) \leq c \text{dist}(x, \partial\Omega)$$

となるものが存在することをいう. $\gamma[x, x_j]$ は x と x_j を結ぶ γ の部分曲線を表す.

この条件は John property と呼ばれ, 例えば領域が外側に向かって (角度 0 で) 尖った部分を持たないことを表している ([24, sec. 5.2], [29] 参照).

Definition 3.2.1 (一様領域)

Ω を \mathbb{R}^n の領域とする. 領域 Ω が $c \geq 1$ に対して c 一様領域 (uniform domain) であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in \Omega$ に対して x_1 と x_2 を端点に持つ Ω 上の求長可能曲線 γ で以下の条件を満たすものが存在することである.

- $\ell(\gamma) \leq c |x_1 - x_2|$.
- 任意の $x \in \gamma$ に対して, $\min_{j=1,2} \ell(\gamma[x, x_j]) \leq c \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ が成り立つ.

Ω が単に一様領域であるとは, ある $c \geq 1$ に対し c -一様領域であることをいう.

この定義は Ω が c 擬凸かつ c -John であることとは異なる事に注意する. 一方, c -一様ならば c 擬凸でありかつ c -John である. また, 領域の一様性は \mathbb{R}^n の領域に対しては定義されていないことにも注意する. 次の例は Gehring–Osgood の結果 [13] を参考にした.

Example 3.2.2 $\Omega = \mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ が $\frac{\pi}{2}$ -一様領域であることを示す.

$z_1, z_2 \in \Omega$ を任意に取る. ある虚軸に平行な直線上に z_1 と z_2 があるときには, この二点を結ぶ Euclid 線分を γ とすればよい. 実際, この γ は上の条件を $c = 1$, 従って $c = \pi/2$ で満たすことが容易に示される.

次にそれ以外の場合を考える. このときは二点を双曲線分, 即ちこの二点を通り実軸に中心を持つ円周の部分弧で二点を Ω 上で結ぶもの, によって結ばばよい. これを確かめるためにまずは次の補題を示す.

(補題) $\phi_1 \in (0, \pi)$ を固定する. このとき任意の $\tilde{\theta} \in [0, \pi/2 + \phi_1/2]$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\frac{\pi}{2} \sin \tilde{\theta} \geq \tilde{\theta} - \phi_1.$$

これは図 3.1 を見れば明らかである.

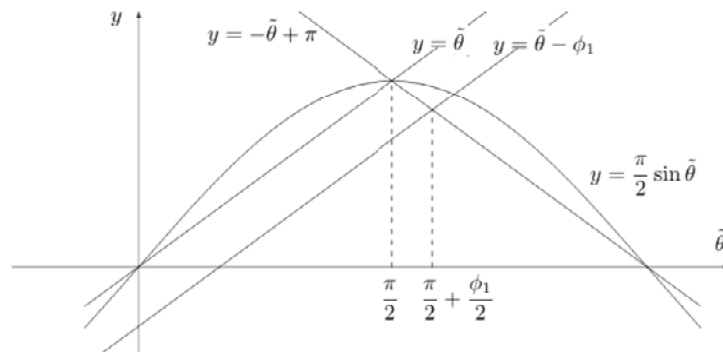


図 3.1

さて, ここで z_1 と z_2 を結ぶ双曲線分を γ とし, $z \in \gamma$ を一つ固定する. さらに図 3.2 のように $\phi, \phi_1, \phi_2, \theta, r$ をとると,

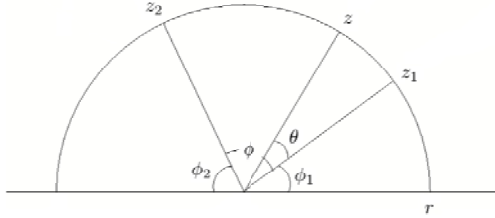


図 3.2

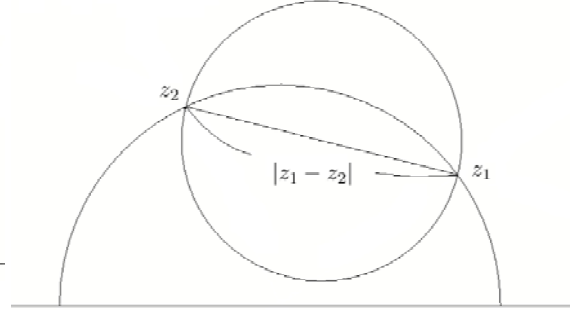


図 3.3

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \frac{\phi}{2} &\implies \phi_1 \leq \theta + \phi_1 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_2}{2} \\ &\implies 0 \leq \theta + \phi_1 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\phi_1}{2} \end{aligned}$$

であるから補題より

$$\frac{\pi}{2} \sin(\theta + \phi_1) \geq \theta + \phi_1 - \phi_1 = \theta$$

が成り立つ. 従って $0 \leq \theta \leq \phi/2$ のときは

$$\min_{j=1,2} \ell(\gamma[z, z_j]) = r\theta \leq \frac{\pi}{2} r \sin(\theta + \phi_1) = \frac{\pi}{2} \text{dist}(z, \partial\Omega)$$

が成り立つ. $\phi/2 \leq \theta \leq \phi$ のときも同様にすればよい. また, 図 3.3 のような円を考えれば

$$\ell(\gamma) \leq \pi \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \frac{\pi}{2} |z_1 - z_2|$$

も得られる. 同様の証明によって上半空間 \mathbb{H}^n も $\frac{\pi}{2}$ 一様領域であることがわかる.

3.3 LLC 領域

前節と類似した特徴付けを持つ領域でもうひとつ重要なものを定義する. これは LLC (linearly locally connected) 領域と呼ばれる.

Definition 3.3.1 (LLC 領域)

Ω を \mathbb{R}^n の領域とする. Ω が $c \geq 1$ に対して c -LLC 領域であるとは, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と任意の $r > 0$ に対して次の条件が成り立つことを言う.

- 任意の $x_1, x_2 \in \Omega \cap \bar{B}_r^n(x)$ は $\Omega \cap \bar{B}_{cr}^n(x)$ 上の曲線によって結ばれる.
- 任意の $x_1, x_2 \in \Omega \setminus B_r^n(x)$ は $\Omega \setminus B_{r/c}^n(x)$ 上の曲線によって結ばれる.

また, Ω が単に LLC 領域であるとは, ある $c \geq 1$ に対して c -LLC 領域であることをいう.

一つ目の条件は LLC_1 条件と呼ばれる. LLC_1 条件は例えば, 領域が内側に向かって (角度 0 で) 尖った部分を持たないという事を言い表している. これはちょうど John property とは逆である (図 3.4, 3.5 参照).

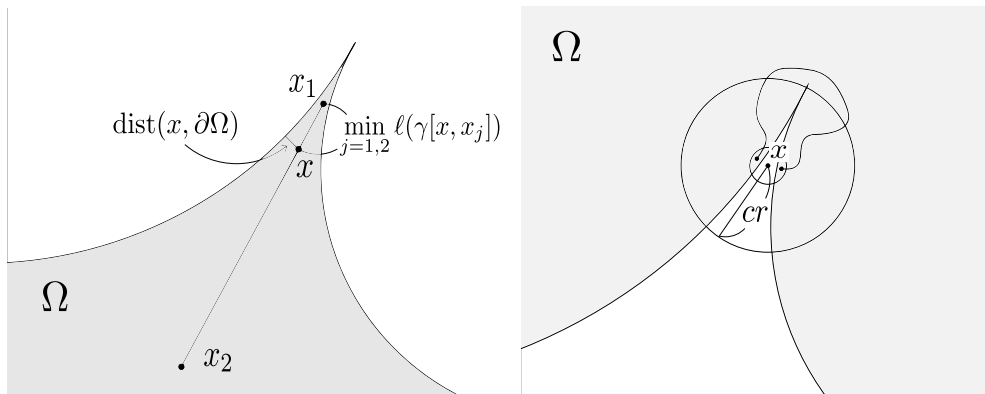


図 3.4 :John property を満たさない⁰ 図 3.5 : LLC_1 条件を満たさない

Example 3.3.2

図 3.5 の極端な例として, $\Omega = \mathbb{D} \setminus [0, 1)$ が挙げられる. x を区間 $(0, 1)$ の点に選び $r > 0$ を十分小さく取れば容易に LLC 領域でないことがわかる. この例は図 3.5 の尖点を挟んだ二つの境界弧が完全にくっついたものと考えられる.

次の補題は, 二つ目の条件が LLC_1 条件を非有界な領域 (特に \mathbb{R}^n の領域) にもうまく働くようにしているという事を示している. 二つ目の条件は LLC_2 条件と呼ばれる. 証明は [12] を参考にした.

⁰ x_1 を尖点に近づけ x をうまく取れば, 任意の $c \geq 1$ に対して John property を満たせないことがわかる.

Lemma 3.3.3

Ω を $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域とする. 任意の $f \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ と任意の $x \in \mathbb{R}^n$, 任意の $r > 0$ に対して次の条件が成り立つとき, Ω は LLC 領域である.

- 任意の $x_1, x_2 \in f(\Omega) \cap \bar{B}_r^n(x)$ は $f(\Omega) \cap \bar{B}_{cr}^n(x)$ 上の曲線によって結ばれる.

証明

Ω が LLC₁ 条件を満たすことは $f = \text{id}_{\bar{\mathbb{R}}^n} \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ とすればわかる. 次に LLC₂ 条件について考える. 選んだ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し

$$f(x) = r^2 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} + x_0$$

とおくと $f \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ となり, $x_1, x_2 \in \Omega \setminus B_r^n(x_0)$ なら $f(x_1), f(x_2) \in f(\Omega) \cap B_r^n(x_0)$ となる. 従って仮定より, ある $f(\Omega) \cap \bar{B}_{cr}^n(x_0)$ 上の曲線 γ によって $f(x_1)$ と $f(x_2)$ を結ぶことができる. $f(\Omega \setminus B_{r/c}^n(x_0)) = f(\Omega) \cap \bar{B}_{cr}^n(x_0)$ であるから, $f^{-1}(\gamma)$ は x_1 と x_2 を結ぶ $\Omega \setminus B_{r/c}^n(x_0)$ 上の曲線となる. \square

3.4 QED 領域

1.2 節で述べたように極値的距離は二つのコンパクト集合を固定したとき, そのコンパクト集合を含むような領域にも依存して変化する. この性質を使って領域の (境界の) 歪み具合を測ることを考える.

Definition 3.4.1 (QED 領域)

Ω を $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域とする. Ω が $c \geq 1$ に対して c -QED (quasi extremal distance) 領域であるとは, 任意の連続体 $E, F \subset \Omega$ に対して

$$\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F) \leq c \delta^\Omega(E, F)$$

が成り立つことである. また Ω が単に QED 領域であるとは, ある $c \geq 1$ に対して c -QED 領域であることをいう.

$\mathcal{F}^\Omega(E, F) \subset \mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F)$ であるから,

$$\delta^\Omega(E, F) \leq \delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F)$$

は常に正しい. つまりこの定義は, Ω の形によって $\mathcal{F}^\Omega(E, F)$ が $\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F)$ に比べて少なくなり過ぎないようにする, という制約を表している.

Example 3.4.2

$\Omega = \mathbb{H}^n$ は 2-QED 領域である. これを証明するには [9, Lemma 1] の Gehring の方法がある. $E, F \subset \Omega$ を連続体とし, まず次の補題を証明する.

$$\text{(補題)} \quad \text{mod}(\mathcal{F}^\Omega(E, F)) = \text{mod}(\mathcal{F}^{\bar{\Omega}}(E, F)).$$

$\mathcal{F} = \mathcal{F}^\Omega(E, F)$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^{\bar{\Omega}}(E, F)$ とする. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であるから $\text{mod}(\mathcal{F}) \leq \text{mod}(\mathcal{F}')$ が成り立つ.

次に $e = (0, \dots, 0, 1)$ とし, $t \in (0, 1)$ に対して

$$f(x) = x + t \text{dist}(x, E \cup F)e$$

を考える. ただし $f(\infty) = \infty$ とする. このとき f は $\bar{\mathbb{R}}^n$ の同相写像であり, 任意の $x, y \in \bar{\mathbb{R}}^n$ に対し

$$(1-t)|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq (1+t)|x-y|$$

が成り立つ. ここで, 任意に $\mu \in \text{adm}(\mathcal{F})$ をとり, $\rho = (1+t)\mu \circ f$ とおく. このとき任意の $\gamma \in \mathcal{F}'$ に対して $f(\gamma) \in \mathcal{F}$ であるから,

$$1 \leq \int_{f(\gamma)} \mu ds \leq \int_{\gamma} (1+t)\mu \circ f ds = \int_{\gamma} \rho ds$$

が成り立つ. つまり $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F}')$ となる. 従って,

$$\text{mod}(\mathcal{F}') \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dm \leq \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \mu^n dm$$

を得る. μ は任意であったから, $t \rightarrow 0$ とすれば次の不等式を得る.

$$\text{mod}(\mathcal{F}) \geq \text{mod}(\mathcal{F}'). \quad \text{(補題の証明終).}$$

さて r を $\partial\Omega$ に関する反転, つまり $r((x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ とし,

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in \bar{\Omega}) \\ r(x) & (x \in r(\Omega)) \end{cases}$$

とする. また, $E' = E \cup r(E)$, $F' = F \cup r(F)$ とおく.

まず $\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F) \subset \mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E', F')$ であるから $\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F) \leq \delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E', F')$ が成り立つ. 次に, 任意に $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F}^{\bar{\Omega}}(E, F))$ をとる. 任意の $\gamma \in \mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E', F')$ に対して $f(\gamma) \in \mathcal{F}^{\bar{\Omega}}(E, F)$ であるから,

$$1 \leq \int_{f(\gamma)} \rho ds = \int_{\gamma} \rho \circ f ds$$

が成り立つ. 従って $\rho \circ f \in \text{adm}(\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E', F'))$ となる. 従って,

$$\begin{aligned} \text{mod}(\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E', F')) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\rho \circ f)^n dm \\ &= \int_{\Omega} \rho^n dm + \int_{r(\Omega)} (\rho \circ r)^n dm \\ &= 2 \int_{\Omega} \rho^n dm \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dm \end{aligned}$$

が成り立つ. $\rho \in \text{adm}(\mathcal{F}^{\bar{\Omega}}(E, F))$ は任意だったから,

$$\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E', F') = \text{mod}(\mathcal{F}^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E', F')) \leq 2 \text{mod}(\mathcal{F}^{\bar{\Omega}}(E, F)) = 2\delta^{\bar{\Omega}}(E, F)$$

が得られる. 以上と補題を合わせると次の不等式を得る.

$$\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F) \leq \delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E', F') \leq 2\delta^{\bar{\Omega}}(E, F) = 2\delta^{\Omega}(E, F).$$

次の Proposition 3.4.3 と Example 3.4.2 から擬円板, および擬球は QED 領域であることがわかる.

Proposition 3.4.3

Ω を $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域とし, $f: \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ を K 擬等角写像とする. Ω が c -QED 領域であれば, $\Omega' = f(\Omega)$ は cK^2 -QED 領域である.

証明

擬等角写像の定義より

$$\delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(E, F) \leq K \delta^{\bar{\mathbb{R}}^n}(f^{-1}(E), f^{-1}(F)) \leq cK \delta^{\Omega}(f^{-1}(E), f^{-1}(F)) \leq cK^2 \delta^{\Omega'}(E, F)$$

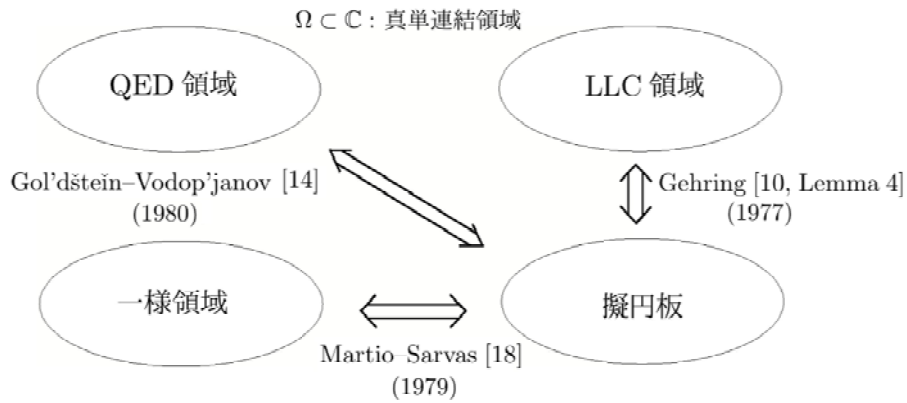
が任意の連続体 $E, F \subset \Omega'$ に対して成り立つ. □

3.5 擬円板の幾何学的特徴づけ

この節ではここまでで紹介してきた領域のクラスと擬円板, および擬球との関係を述べる. これらの領域の関係についての研究は 1970 年代に特に活発で, 1980 年代後半にはほとんどの関係が解明されている.

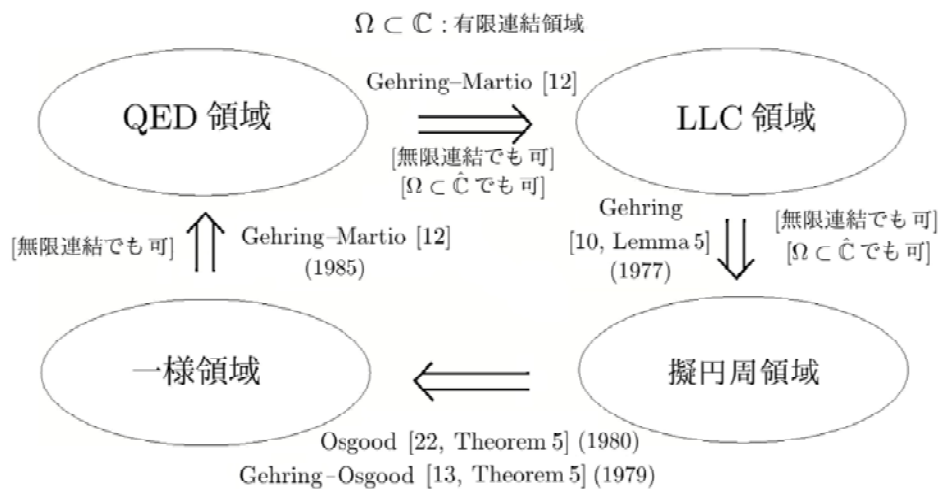
Ω が \mathbb{C} の真単連結領域であるとき, Ω が擬円板であること, 一様領域であること, LLC 領域であること, QED 領域であることは全て同値である. 一様領域や QED 領域などには Jordan 領域という仮定が必要そうではあるが, もちろんそれぞれの領域は Jordan 領域であることが示されている.

まず, Gehring [10, Lemma 4], [11] によって LLC 領域と擬円板の同値性が得られている. 次に Martio-Sarvas [18] が擬円板と一様領域の同値性を示し, 最後に Gol'dšteĭn-Vodop'janov [14] によって擬円板と QED 領域の同値性が示された (擬円板が QED 領域であることは前節で確かめた).



以上の研究は多重連結領域の場合へ一般化される. Ω を \mathbb{C} の有限連結領域とする. このとき同様に, Ω が擬円周領域であること, 一様領域であること, LLC 領域であること, QED 領域であることは全て同値となる. 上述したように単連結領域に対しては, 擬円板との同値性がそれぞれ個別に証明された. それに対し多重連結領域への一般化, 即ち擬円周領域に対しては, それぞれの領域の性質がうまく関係しあってその同値性は証明される.

まず Gehring は上と同じ論文 [10, Lemma 5] 内で LLC 領域ならば擬円周領域であることを証明している. これは領域 Ω が無限連結でも成り立つ. 次に Ω が有限連結であるとき, 擬円周領域ならば一様領域であることを Gehring と Osgood [22, Theorem 5], [13, Theorem 5] が証明する. 最後に Gehring-Martio [12] によって, 一様ならば QED, および QED ならば LLC であることが証明された.



一様領域ならば QED 領域であることは $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の場合でも成り立ち, QED 領域ならば LLC 領域であることは $\Omega \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ の場合に対しても成り立つ. さらに Gehring–Martio は同論文 [12] で擬球面領域ならば LLC 領域となることを $\Omega \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ の場合に証明している.

一方で, その他の領域間包含関係の多くは存在しないことが知られている (下図 3.6 参照). 反例については [12] などを参照.

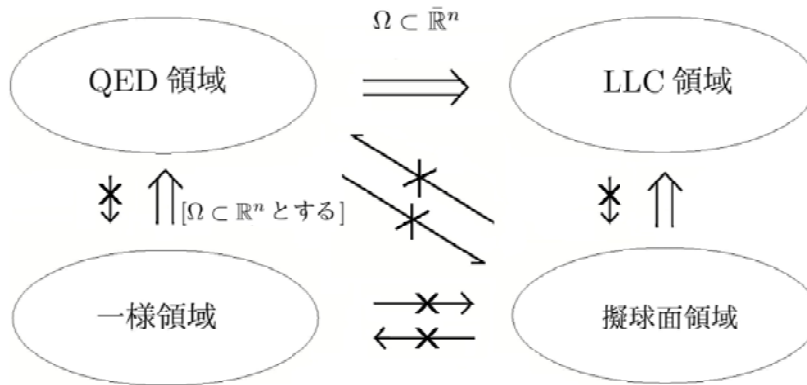


図 3.6 : バツ付き矢印は反例が見つかったものを表す

これらは全て幾何学的条件を備える領域であるが, 解析的条件を持った領域でこれらの領域と密接な関係があるものも多い. 例えば Sobolev 拡張領域などがある. この領域は, 領域上の Sobolev 空間から \mathbb{R}^n の Sobolev 空間への有界線形拡張作用素が存在することとして定義される. この領域の性質として例えば, 一般の \mathbb{R}^n の領域に対して, 一様領域ならば Sobolev 拡張領域であることや, Sobolev 拡張領域ならば QED 領域となることなどが知られている. 従って単連結な平面領域に対して, 擬円板と Sobolev 拡張領域は一致することがわかる. Sobolev 拡張領域については [17] が有名である.

3.6 Gehring–Martio の定理

この節では前節で紹介した Gehring–Martio による結果 [12] の一部を証明する. 証明も [12] に沿って進める.

まず $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域に対し, QED 領域ならば LLC 領域であることを証明する. 証明のポイントは極値的距離の評価を巧みに使って, 他の幾何学的量を評価することである.

Lemma 3.6.1

Ω を \mathbb{R}^n の領域とする. Ω が c -QED 領域ならば, n と c のみに依存する定数 $a = a(n, c) \geq 1$ に対して Ω は a 擬凸領域である.

証明

$x_1, x_2 \in \Omega$ を固定し, $|x_1 - x_2| = r$ とする. さらに x_1 と x_2 を端点を持つ Ω 上の曲線 α を一つ選び, $F_1 = \alpha \cap \bar{B}_{r/4}^n(x_1)$, $F_2 = \alpha \cap \bar{B}_{r/4}^n(x_2)$ とおく. このとき

$$\min_{j=1,2} \text{diam}(F_j) \geq \frac{r}{4} \geq \frac{1}{4} \text{dist}(F_1, F_2)$$

であるから, Theorem 1.2.5 より

$$\delta^{\mathbb{R}^n}(F_1, F_2) \geq c_n \log \frac{5}{4} = c'_n$$

となる. ただし c_n は n のみに依存する正の定数である. Ω は c -QED 領域であるから, $\delta^\Omega(F_1, F_2) \geq c'_n/c$ を得る. 次に,

$$s = \frac{r}{4} \exp \left\{ \left(\frac{c'_n}{2c\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{1-n}} \right\}$$

に対して,

$$\Gamma_1 = \{ \gamma \in \mathcal{F}^\Omega(F_1, F_2) \mid \gamma \subset B_s^n(x_2) \}, \quad \Gamma_2 = \mathcal{F}^\Omega(F_1, F_2) \setminus \Gamma_1$$

と定め, $L = \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{F}^\Omega(F_1, F_2) \}$ とする. まず Example 1.1.3 から,

$$\text{mod}(\Gamma_1) \leq \frac{\Omega_n s^n}{L^n}$$

を得る. さらに Proposition 1.2.4 の証明と同様の方法で Γ_2 のモジュラスを評価すると

$$\text{mod}(\Gamma_2) \leq \omega_{n-1} \left(\log \frac{4s}{r} \right)^{1-n} = \frac{c'_n}{2c}$$

が得られる. 従って以上より

$$\begin{aligned} \frac{c'_n}{c} \leq \delta^\Omega(F_1, F_2) &= \text{mod}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \\ &\leq \text{mod}(\Gamma_1) + \text{mod}(\Gamma_2) \leq \frac{\Omega_n s^n}{L^n} + \frac{c'_n}{2c} \end{aligned}$$

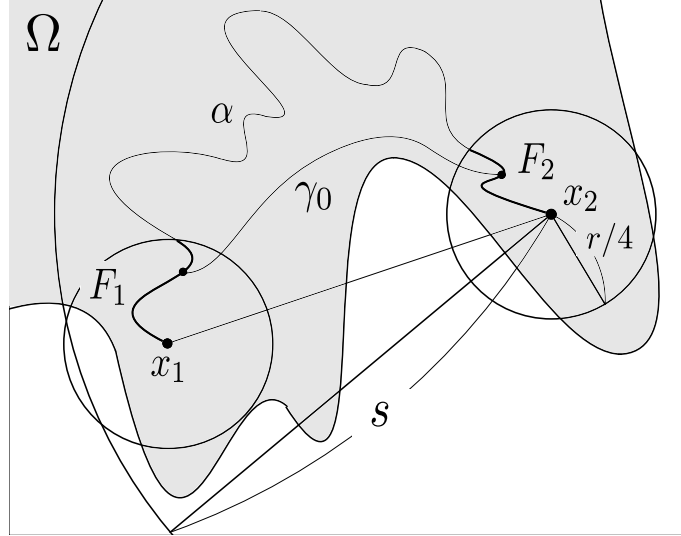
つまり,

$$L \leq s \left(\frac{2\Omega_n c}{c'_n} \right)^{\frac{1}{n}} < r \exp \left\{ 2 \left(\frac{2\omega_{n-1} c}{c'_n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} = a' r$$

が得られる. 二つ目の不等号では作為的に少し大きくなるようにしている. また, a' は n と c のみに依存した定数であることに注意する. 従って L の定義から $\gamma_0 \in \mathcal{F}^\Omega(F_1, F_2)$ で

$$\ell(\gamma_0) \leq a'r = a' |x_1 - x_2|$$

を満たすものが存在することがわかる.



次に γ_0 の端点を $y_1 \in F_1$, $y_2 \in F_2$ とし, $r_i = |x_i - y_i|$ とおく. このとき $r_i \leq r/4$ が成り立つ. ここで各 $i = 1, 2$ に対して, $F_1 = \alpha \cap \bar{B}_{r_i/4}^n(x_1)$, $F_2 = \gamma_0 \cap \bar{B}_{r_i/4}^n(y_i)$ と置き直して同じ議論を行うと, F_1 と F_2 を Ω 上で結ぶ曲線 γ_1^i で

$$\ell(\gamma_1^i) \leq a'r_i \leq \frac{a'}{4} |x_1 - x_2|$$

を満たすものが得られる. このように繰り返し曲線を構成していけば, Ω 上の曲線族 $\{\gamma_j^i \mid i = 1, 2, j = 1, 2, \dots\}$ で以下の条件を満たすものが得られる.

- i. γ_j^i は α と γ_{j-1}^i を結ぶ曲線である. ($i = 1, 2, j = 2, 3, \dots$)
- ii. $\ell(\gamma_j^i) \leq \frac{a'}{4^j} r$.
- iii. α に属する γ_j^i の端点は, $\bar{B}_{r/4^{j+1}}^n$ に属す.

これらの条件から γ_j^i をうまくつないでいけば, Ω 上の求長可能曲線 γ

で x_1 と x_2 を結ぶものが得られることがわかる. さらにこのとき

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &\leq \ell(\gamma_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \ell(\gamma_j^1) + \sum_{j=1}^{\infty} \ell(\gamma_j^2) \\ &\leq a'r + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a'}{4^j} r + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a'}{4^j} r = \frac{5a'}{3} |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

が成り立つ. $x_1, x_2 \in \Omega$ は任意であったから, $a = 5a'/3$ とすれば, Ω は a 擬凸である. また, a' は n と c にのみ依存する定数であったので, a も n と c のみに依存する定数である. 以上より主張を得る. \square

Theorem 3.6.2 (cf. [12] Lemma 2.11 (1985))

Ω を $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域とする. Ω が c -QED 領域ならば, c と n のみに依存する定数 $c' = c'(n, c) \geq 1$ に対して Ω は c' -LLC 領域である.

証明

任意に $f \in \text{Möb}(\mathbb{R}^n)$ と $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ をとる. このとき Proposition 3.4.3 より $f(\Omega)$ は c -QED 領域である. さらに Lemma 3.6.1 により c と n のみに依存する定数 $a \geq 1$ に対して $f(\Omega)$ は a 擬凸領域となることがわかる. これより任意の $x_1, x_2 \in f(\Omega) \cap \bar{B}_r^n(x)$ は

$$\ell(\gamma) \leq a |x_1 - x_2|$$

を満たす $f(\Omega)$ 上の求長可能曲線 γ によって結ばれる. 任意の $y \in \gamma$ に対して

$$|x - y| \leq r + \frac{a}{2} |x_1 - x_2| \leq r + ar = (1 + a)r$$

が成り立つので, $\gamma \subset \bar{B}_{(1+a)r}^n(x)$ である. a が f, x, r に依らない定数であることに注意すれば, Lemma 3.3.3 より Ω は $(1 + a)$ -LLC 領域であることがわかる. \square

次に $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域に対して, 一様領域ならば QED 領域となることを証明する. この証明は前定理が幾何学的な考察の下で示されたのに対し, 解析的手法を用いて示される.

Ω を $\bar{\mathbb{R}}^n$ の領域とし, $E, F \subset \Omega$ を連続体とする. このとき $\Omega \setminus \{\infty\}$ 上の ACL 関数¹ u で, $E \setminus \{\infty\}$ 上で $u \leq 0$, $F \setminus \{\infty\}$ 上で $u \geq 1$ を満たすような

¹ACL(absolutely continuous on lines) 関数については [28] などを参照せよ.

ものの全体を $W(E, F; \Omega)$ と表す. このとき

$$\text{Cap}(E, F; \Omega) = \inf_{u \in W(E, F; \Omega)} \int_{\Omega \setminus \{\infty\}} |\nabla u|^n dm$$

は E と F の Ω 上での容量と呼ばれる. 実はこの量に関して次の有名な定理が成り立つ.

Theorem 3.6.3 (J. Hesse [15] (1975))

任意の連続体 $E, F \subset \Omega$ に対して以下が成り立つ.

$$\text{Cap}(E, F; \Omega) = \delta^\Omega(E, F).$$

この定理により, 極値的距離の代わりに解析的な量である容量を用いることができる.

Theorem 3.6.4 (cf. [12] Lemma 2.18 (1985))

\mathbb{R}^n の領域に対して, 一様領域は QED 領域である.

証明

Ω を \mathbb{R}^n の一様領域とする. $E, F \subset \Omega$ を連続体とし, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. このとき $u \in W(E, F; \Omega)$ と $t > 0$ で

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^n dm \leq \text{Cap}(E, F; \Omega) + \varepsilon$$

かつ, E 上で $u \leq -t$, F 上で $u \geq 1+t$ を満たすようなものが存在する. 実際, $v \in W(E, F; \Omega)$ で

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^n dm < \text{Cap}(E, F; \Omega) + \varepsilon$$

を満たすようなものを取り, 十分小さい $t > 0$ に対して

$$u = \frac{1+t}{1-t} (v-t)$$

とすればよいことが簡単な計算からわかる.

このとき Ω は一様領域なので, Jones の定理 [17, Theorem 2] およびその証明により, u, E, F に依存しない定数 M と, 関数 $u^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ で以下の条件を満たすものが存在する.

- $i = 1, \dots, n$ に対し, 弱微分 $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ は $L^n(\mathbb{R}^n)$ に属す.
- $u^*|_{\Omega} = u$.
- $M \int_{\Omega} |\nabla u|^n dm \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^n dm$.

次に軟化子を ρ_{δ} とする². $u^*|_{\Omega} = u$ は連続なので, 畳込み $\rho_{\delta} * u^*$ は $\delta \rightarrow 0$ で u に Ω 上広義一様収束する. また $\rho_{\delta} * u^*$ の n 乗 Dirichlet 積分も u^* の n 乗 Dirichlet 積分に収束するから, 十分小さい δ をとれば

- i. $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\rho_{\delta} * u^*)|^n dm \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^n dm + \varepsilon$,
- ii. E 上で $\rho_{\delta} * u^* \leq 0$, F 上で $\rho_{\delta} * u^* \geq 1$

を満たすようにできる ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ であるから, $E \cup F$ は \mathbb{R}^n のコンパクト集合である). さらに, $\rho_{\delta} * u^*$ は \mathbb{R}^n 上で滑らかな関数であるから, 条件 ii) より $\rho_{\delta} * u^* \in W(E, F; \mathbb{R}^n)$ となる. つまり

$$\text{Cap}(E, F; \mathbb{R}^n) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\rho_{\delta} * u^*)|^n dm$$

を得る. 以上より

$$\begin{aligned} \text{Cap}(E, F; \mathbb{R}^n) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\rho_{\delta} * u^*)|^n dm \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^n dm + \varepsilon \\ &\leq M \int_{\Omega} |\nabla u|^n dm + \varepsilon \leq M \text{Cap}(E, F; \Omega) + \varepsilon(M+1) \end{aligned}$$

が成り立つ. $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば

$$\text{Cap}(E, F; \mathbb{R}^n) \leq M \text{Cap}(E, F; \Omega)$$

が得られ, M は E, F に依存しない定数であったから, Theorem 3.6.3 により Ω は QED 領域である. \square

²例えば $\rho_{\delta}(x) = \frac{1}{c_{\delta}} \exp\left(-\frac{1}{1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2}\right)$ ($|x| < \delta$), $\rho_{\delta}(x) = 0$ ($|x| \geq \delta$), $c_{\delta} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2}\right) dm$ などがある. 軟化子の性質については [35] を参照.

(注意) この証明では, 証明中に使った Jones の定理 [17, Theorem 2] が非常に重要な役割を果たしていることがわかる.

Ω 上の可測関数 u で, 一階弱偏微分がそれぞれ $L^n(\Omega)$ に属すものの全体を $E(\Omega)$ とする. ただし測度 0 集合を除いて値が一致するものと, 差が定数になるものは同一視する. このとき, ノルム

$$\|u\|_{E(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} f\|_{L^n(\Omega)}$$

によって $E(\Omega)$ は Banach 空間となる. このとき有界線形作用素

$$\Lambda : E(\Omega) \longrightarrow E(\mathbb{R}^n)$$

で, 任意の $f \in E(\Omega)$ に対して $\Lambda f|_{\Omega} = f$ が成り立つようなものが存在するとき, Ω は EDE 領域 (extension domain for the Dirichlet energy space) であるという.

Jones の定理 [17, Theorem 2] の主張は, 一様領域は EDE 領域であるというものである. また, 同論文 [17] 内で Jones は一様領域は Sobolev 拡張領域であることや, EDE 領域は擬等角写像によって不変であることなども証明している. 逆に Sobolev 拡張領域が一様領域にならないことは [33] などによって知られている.

第4章 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ との擬等角同値性について

この章では, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相な Riemann 面を決定するための研究について, その結果を述べる. 序文で述べたように本研究の背景には無限次元 Teichmüller 空間の理論があり, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の Teichmüller 空間の記述を目指すものである.

まず 4.1 節で $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相な Riemann 面が \mathbb{C} から離散集合を除いたものに限られることを説明する. 以降の節で, \mathbb{C} の離散集合 A で, $\mathbb{C} \setminus A$ が $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相になるものがどのようなものであるか考察を進め, 得られた判定条件を証明する.

4.1 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の擬等角変形

$R = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ とする. まず, Riemann 面 R' で R と擬等角同相になるものがどのようなものであるか調べる.

$f: R \rightarrow R'$ を擬等角写像とする. Theorem 1.3.2 により各 $n \in \mathbb{Z}$ は除去可能であるから, n に対応する点 $f(n)$ を Riemann 面 R' に (形式的に) 付け加えることによって f を拡張することができる¹. さらに Theorem 1.3.2 (注意 2) から \mathbb{C} 上に拡張された f も擬等角写像である. 最後にもう一度 ∞ に対して Theorem 1.3.2 を使えば, f を Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から $R' \cup f(\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ への擬等角写像に拡張できる. 拡張された f も同じ f で表す.

$R' \cup f(\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ は種数 0 のコンパクト Riemann 面であるから, 一意化定理により $\hat{\mathbb{C}}$ と等角同値である. 従って $R' = \hat{\mathbb{C}} \setminus f(\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ であるとしてよい. また, f の同相性により $f(\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ はただ一つの集積点 $f(\infty)$ を持つ. Möbius 変換を合成することによって $f(\infty)$ を ∞ に対応させると, R' は \mathbb{C} から \mathbb{C} の離散集合を除いたものであることがわかる.

従って, 以下では $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相な Riemann 面を決定するために次の問題を考える.

¹ R' は一般の Riemann 面としているので, 付け加えられる点はある R' のコンパクト化における理想境界の一点である. さらに座標変換 (等角写像) に対して puncture は除去可能であるから, R' の複素構造も自然に拡張される.

Problem 4.1.1

\mathbb{C} の無限個の元を持つ離散集合 A で $\mathbb{C} \setminus A$ が領域となるものの全体を \mathcal{P} とする. $A \in \mathcal{P}$ で $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が擬等角同相になるものを決定せよ.

Example 4.1.2

離散集合 $A \subset \mathbb{C}$ に対して, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が等角同値になるため必要十分条件は, ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $b \in \mathbb{C}$ によって

$$A = \{an + b \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と書けることである. これは Riemann の除去可能性定理を使えば容易に確かめられる.

Example 4.1.3

$t \in \mathbb{R}$ に対して $A_t = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cup \{it\}$ とすれば, $\mathbb{C} \setminus A_t$ は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相である. 実際,

$$f(x + iy) = \begin{cases} x + i(y + tx + t) & (-1 \leq x \leq 0) \\ x + i(y - tx + t) & (0 < x \leq 1) \\ x + iy & (x < -1, 1 < x) \end{cases}$$

とすれば f は $(\sqrt{4+t^2} + t)/(\sqrt{4+t^2} - t)$ 擬等角写像になる.

4.2 擬円板の一様性を用いた判定条件

この節では $A \in \mathcal{P}$ に対して, $\mathbb{C} \setminus A$ が $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相であるかどうかの一つの判定条件を, 擬円板の一様性を用いて証明する.

$A \in \mathcal{P}$ とする. $z \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ に対して $Q_r(z) = \{z + x + iy \mid -r \leq x, y \leq r\}$ とおき,

$$d(z, r; A) = \sup_{w \in \bar{D}_r(z)} \text{dist}(w, A),$$

$$\tilde{d}(z, r; A) = \sup_{w \in Q_r(z)} \text{dist}(w, A)$$

と定める. このとき任意の $z \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ に対して, $\bar{D}_r(z) \subset Q_r(z) \subset \bar{D}_{\sqrt{2}r}(z)$ であるから以下の不等式が成り立つ.

$$d(z, r; A) \leq \tilde{d}(z, r; A) \leq d(z, \sqrt{2}r; A). \quad (4.1)$$

Theorem 4.2.1 (擬円板の一様性を用いた判定条件)

$A \in \mathcal{P}$ とする. 離散集合 $B \subset \mathbb{R}$ で, $\mathbb{C} \setminus B$ が $\mathbb{C} \setminus A$ と擬等角同相になるものが存在するとき, 次が成り立つ.

$$\sup_{z \in \mathbb{C}, r > 0} \frac{r}{d(z, r; A)}, \quad \sup_{z \in \mathbb{C}, r > 0} \frac{r}{\tilde{d}(z, r; A)} < +\infty.$$

証明

まず不等式 (4.1) から次が得られる.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{z \in \mathbb{C}, r > 0} \frac{r}{d(z, r; A)} \leq \sup_{z \in \mathbb{C}, r > 0} \frac{r}{\tilde{d}(z, r; A)} \leq \sup_{z \in \mathbb{C}, r > 0} \frac{r}{d(z, r; A)}. \quad (4.2)$$

次に $f: \mathbb{C} \setminus B \rightarrow \mathbb{C} \setminus A$ を擬等角写像とすると, 4.1 節と同様にして f は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への擬等角写像に拡張できる. 拡張した f も同じ f で表す. このとき $\Omega = f(\mathbb{H})$ とすると Ω は擬円板であり, $f(B) = A$ であるから $A \subset \partial\Omega$ である. 特に $f(\infty) = \infty$ であるから $\Omega \subset \mathbb{C}$ がわかり, 従って第 3 章で述べたように Ω は一様領域である. 以下 Ω は c -一様領域とする (ただし $c \geq 1$).

任意に $z_1 \in \Omega$ と $r > 0$ をとる. Ω は非有界領域であるから, $z_2 \in \Omega$ で

$$|z_1 - z_2| = \frac{2r}{c}$$

を満たすものがとれる. さらに Ω の一様性により, z_1 と z_2 を結ぶ Ω 上の求長可能曲線 γ で次の条件を満たすものが存在する.

- i. $\ell(\gamma) \leq c|z_1 - z_2| = 2r$.
- ii. $\min_{i=1,2} \ell(\gamma[z, z_i]) \leq c \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ が任意の $z \in \gamma$ に対して成り立つ.

さらに $\ell(\gamma[z, z_1])$ に対して中間値の定理を使えば, $z \in \gamma$ で $\ell(\gamma[z, z_1]) = \ell(\gamma)/2$ を満たすものが存在する. このとき

$$\min_{i=1,2} \ell(\gamma[z, z_i]) = \ell(\gamma[z, z_1]) = \ell(\gamma[z, z_2])$$

である. 従って

$$2r \geq \ell(\gamma) = \ell(\gamma[z, z_1]) + \ell(\gamma[z, z_2]) = 2\ell(\gamma[z, z_1]) \geq 2|z - z_1|.$$

つまり $z \in \bar{D}_r(z_1)$ となる. 以上より,

$$\begin{aligned} \frac{2r}{c} = |z_1 - z_2| &\leq \ell(\gamma) \\ &= 2 \min_{i=1,2} \ell(\gamma[z, z_i]) \\ &\leq 2c \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \leq 2c \operatorname{dist}(z, A) \leq 2c d(z_1, r; A). \end{aligned}$$

つまり $\frac{r}{d(z_1, r; A)} \leq c^2$ を得る. z_1, r は任意であったので (4.2) と併せて主張を得る. \square

Corollary 4.2.2

$s > 0$ に対して $A_s = \mathbb{Z} + i\{\pm n^s \mid n = 0, 1, 2, \dots\} \in \mathcal{P}$ と置く. このとき $\mathbb{C} \setminus A_s$ は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相でない. 特に, $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ と $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ は擬等角同相でない.

証明

$s \leq 1$ の場合には, 任意の $r \geq 1$ に対して $\tilde{d}(0, r; A_s) = \sqrt{2}/2$ が成り立つから

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\tilde{d}(0, r; A_s)} = +\infty$$

となる (図 4.1 参照). \mathbb{Z} は \mathbb{R} の離散集合であるから, Theorem 4.2.1 より主張を得る.

次に $s > 1$ の場合には任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ (図 4.2 参照).

$$\left\{ 2\tilde{d}(0, n^s; A_s) \right\}^2 = (n^s - (n-1)^s)^2 + 1$$

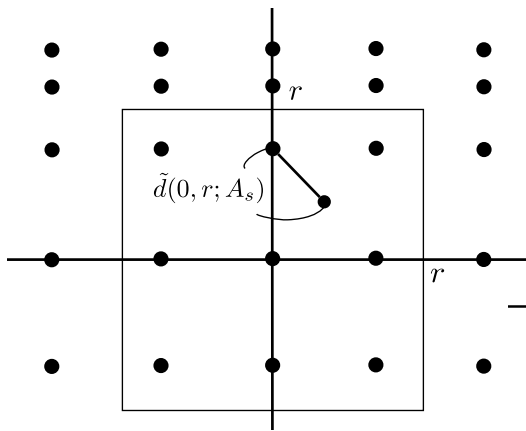


図 4.1: $s \leq 1$ の場合

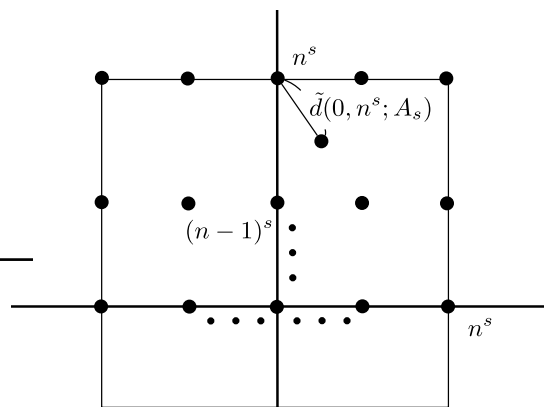


図 4.2: $s > 1$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{n^s}{\tilde{d}(0, n^s; A_s)} &= \frac{2n^s}{\sqrt{(n^s - (n-1)^s)^2 + 1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^{2s}}} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

であるので $s \leq 1$ の場合と同様にして主張を得る. \square

この系のようにして他の離散集合に対しても判定が可能である.

Example 4.2.3

$s > 0$ に対して $A'_s = \mathbb{Z} + i\{n^s \mid n = 0, 1, 2, \dots\} \in \mathcal{P}$ と置く. このとき $\mathbb{C} \setminus A'_s$ は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同相でない. 特に, $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + i\mathbb{N})$ と $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ は擬等角同相でない.

これを確かめるには, Corollary 4.2.2 の証明における $\tilde{d}(0, n^s; A_s)$ の代わりに $\tilde{d}(n^s/2, n^s/2; A'_s)$ を計算すればよい. 実際, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{n^s}{2}}{\tilde{d}\left(\frac{n^s}{2}, \frac{n^s}{2}; A'_s\right)} &= \frac{n^s}{\sqrt{(n^s - (n-1)^s)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^{2s}}} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Example 4.2.4

Corollary 4.2.2 や Example 4.2.3 のような離散集合に対して判定が可能であったのに対し, 例えば $A = \mathbb{Z} + i\{2^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\} \in \mathcal{P}$ に対しては判定できない. このように, 上の系や例と類似した離散集合であっても判定できないものもある.

4.3 予備的考察

この節では前 4.2 節の内容について考察し, 次節の準備を行う.

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ は無限位数の自己同型写像 $z + n$ ($n \in \mathbb{Z}$) を持つ. また, Corollary 4.2.2 や Example 4.2.3 で考えた離散集合 A_s, A'_s に対して, $\mathbb{C} \setminus A_s$ や $\mathbb{C} \setminus A'_s$ も同様に無限位数の自己同型写像 $z + n$ ($n \in \mathbb{Z}$) を持つ.

しかし, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ は $z + n$ が生成する巡回群 $\langle z + n \rangle$ で割ると解析的有限な Riemann 面になる. ここで解析的有限な Riemann 面とは, コンパクト Riemann 面から有限個の点を除いて得られる Riemann 面の事である. 実際,

$$(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) / \langle z + n \rangle \cong \mathbb{C} \setminus \left(\left\{ e^{\frac{2\pi ki}{n}} \right\}_{k=1}^n \cup \{0\} \right) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \left(\left\{ e^{\frac{2\pi ki}{n}} \right\}_{k=1}^n \cup \{0, \infty\} \right)$$

であるから, 解析的有限な Riemann 面である. 一方, $\mathbb{C} \setminus A_s$ や $\mathbb{C} \setminus A'_s$ はそうでない. 即ち無限位数の自己同型写像 $z + n$ が生成する巡回群 $\langle z + n \rangle$ によって商をとると, 無限個の点を除いた Riemann 球面が現れる.

この性質の違いが, \mathbb{Z} と A_s, A'_s の本質的な違いであると考え, 以下では特に $A \in \mathcal{P}$ で以下の条件を満たすものを考えていく.

(P) 無限位数の自己同型 $h \in \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus A)$ で, $(\mathbb{C} \setminus A) / \langle h \rangle$ が無限個の punctures を持つようなものが存在する.

また, 条件 (P) を満たすような無限位数の自己同型 $h \in \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus A)$ を h_A と書くことにする. ただし h_A は一意的には決まらないが, 一つ選んでこのように表す.

Lemma 4.3.1

$A \in \mathcal{P}$ とする. $h \in \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus A)$ が無限位数であるとき, ある $b \in \mathbb{C}$ が存在して $h(z) = z + b$ と書ける.

証明

Riemann の除去可能性定理から $h \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ と見なせる. 従ってある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $b \in \mathbb{C}$ によって $h(z) = az + b$ と書ける. このとき $h(A) = A$ であることに注意する.

まず $|a| \neq 1$ であると仮定すると, $b/(1-a)$ は h の湧き出し固定点あるいは吸い込み固定点である ([34, p.47] 参照). 従って, 任意の $a \in A$ に対して $\{h^n(a)\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset A$ は $b/(1-a)$ を集積点に持つ. これは $A \in \mathcal{P}$ であることに反する. 従って $|a| = 1$ である.

次に $a \neq 1$ と仮定すると, $a = e^{2\pi i\theta}$ ($\theta \in (0, 1)$) と書ける. また任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$h\left(z + \frac{b}{1-a}\right) = az + \frac{b}{1-a}$$

であるから $h^n(z) = a^n z + b/(1-a)$ となる.

これより $\theta \in \mathbb{Q}$ ならば, ある $n \in \mathbb{Z}$ で $h^n = id_{\mathbb{C}}$ になってしまうため矛盾が起こる. 逆に $\theta \notin \mathbb{Q}$ ならば, $z \in \mathbb{C}$ を $z + b/(1-a) \in A$ となるように取ると, $\{h^n(z + b/(1-a))\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset A$ は集積点を持つので $A \in \mathcal{P}$ に反する. 従って $a = 1$ でなければならない. \square

これより条件 (P) を満たす $A \in \mathcal{P}$ に対して, h_A は平行移動であることがわかる. このときある Affine 変換 f を合成することによって $h_{f(A)}(z) = f \circ h_A \circ f^{-1}(z) = z+1$ とできる. 従って条件 (P) の代わりに次の条件 (P)' を考えれば十分であることがわかる.

(P)' $z+1 \in \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus A)$ であり, $(\mathbb{C} \setminus A) / \langle z+1 \rangle$ は無限個の punctures を持つ.

この条件 (P)' の後半は $S = \{x + iy \mid x \in [0, 1), y \in \mathbb{R}\}$ に A の元が無限個含まれるという条件を表している.

4.4 極値的距離の考察により得られる判定法

この節では $A \in \mathcal{P}$ が前節設定した条件 (P)' を満たすときに, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が擬等角同相となるための条件を考える. ただし以下の研究は前節で説明したように, $A \in \mathcal{P}$ が条件 (P)' を満たせば $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ は擬等角同相でないということを予想してのものである.

まず次の補題を証明する.

Lemma 4.4.1

$A \in \mathcal{P}$ が条件 (P)' を満たすとする. このとき擬等角写像 $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus A$ が存在すれば, f は次の条件を満たす. ただし f を \mathbb{C} から \mathbb{C} への擬等角写像に拡張したものを f と表す (4.1 節参照).

$$\sup_{a \in A, n \in \mathbb{Z}} |f^{-1}(a+n) - f^{-1}(a+n-1)| = +\infty$$

証明

まず, $A \in \mathcal{P}$ は条件 (P)' を満たすので $a \in A, n \in \mathbb{N}$ に対して $a+n \in A$ である. 従って $f^{-1}(a+n)$ は整数であることに注意する. ある $M \in \mathbb{N}$ で, 任意の $a \in A, n \in \mathbb{Z}$ に対して $|f^{-1}(a+n) - f^{-1}(a+n-1)| \leq M$ となるものが存在したと仮定する.

条件 $(P)'$ から $S = \{x + iy \mid x \in [0, 1), y \in \mathbb{R}\}$ には可算無限個の A の元が含まれる. さらに $A \in \mathcal{P}$ であるから, $S \cap A$ の元で同じ虚部を持つものは高々有限個である. 従って $\{\text{Im}(z) \mid z \in S \cap A\}$ も可算無限個の元を持つ. これに適当に番号を付けて

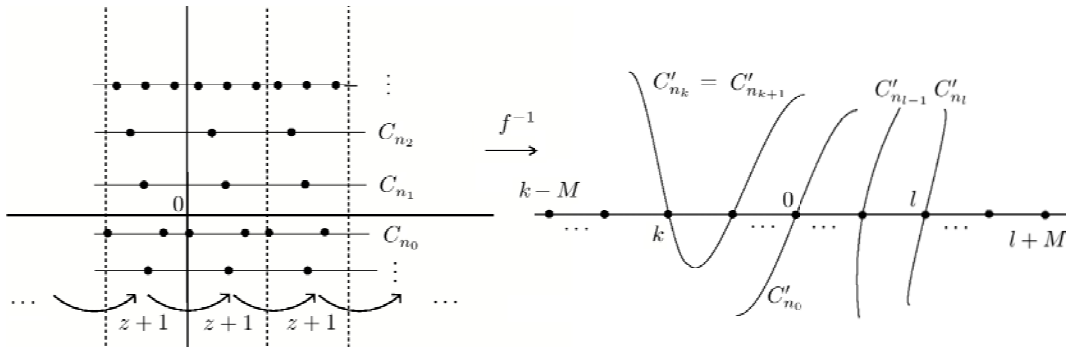
$$\{\text{Im}(z) \mid z \in S \cap A\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

とする. 次に曲線 C_n を

$$C_n(t) = t + ia_n \quad (t \in \mathbb{R})$$

で定め, $C'_n = f^{-1}(C_n)$ とおく. このとき, 各 $m \in \mathbb{Z}$ に対して m を通る曲線が $\{C'_n\}_{n=1}^{\infty}$ の中にただ一つ存在するので, その曲線を C'_{n_m} と書くことにする.

さて, 順番に $C'_{n_0}, C'_{n_1}, C'_{n_2}, \dots$ と増やしていき, 必要ならば $C'_{n_{-1}}, C'_{n_{-2}}, \dots$ と増やしていけば $\{C'_{n_k}, C'_{n_{k+1}}, \dots, C'_{n_{l-1}}, C'_{n_l}\}$ に $M+1$ 種類の曲線が含まれるようにできる.



任意の $a \in A$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $|f^{-1}(a+n) - f^{-1}(a+n-1)| \leq M$ であったから, 各 C'_{n_i} ($i = k, k+1, \dots, l$) はそれぞれ $\{k-M, k-M+1, \dots, k-1\} \cup \{l+1, l+2, \dots, l+M\}$ の点を少なくとも二つ通過する. しかし, 通過する点は少なくとも $2(M+1)$ 個必要であるのに対して, $\{k-M, k-M+1, \dots, k-1\} \cup \{l+1, l+2, \dots, l+M\}$ には $2M$ 個の点しか存在しないので矛盾である. \square

Lemma 4.4.2

$A \in \mathcal{P}$ とし, $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus A$ を K 擬等角写像とする.
このとき任意の $n, m \in \mathbb{Z}$ ($n < m$) と $d \in \mathbb{N}$ に対して, $N_d =$

$[n-d, n]$, $M_d = [m, m+d]$ とおくと

$$\frac{\min \{\text{diam} f(N_d), \text{diam} f(M_d)\}}{|f(m) - f(n)|} \leq \left\{ \exp \left(\frac{\pi^2 K}{\log \left(1 + 2 \frac{m-n}{d} \right)} \right) - 1 \right\}$$

が成り立つ. ただし, f を \mathbb{C} から \mathbb{C} への擬等角写像に拡張した
ものも f と表す (4.1 節参照).

証明

$\text{dist}(f(N_d), f(M_d)) \leq |f(m) - f(n)|$ であるから, Theorem 1.2.5 より

$$\frac{2}{\pi} \log \left(1 + \frac{\min \{\text{diam} f(N_d), \text{diam} f(M_d)\}}{|f(m) - f(n)|} \right) \leq \delta^{\hat{\mathbb{C}}}(f(N_d), f(M_d))$$

が成り立つ. また f の擬等角性から

$$\delta^{\hat{\mathbb{C}}}(f(N_d), f(M_d)) \leq K \delta^{\hat{\mathbb{C}}}(N_d, M_d)$$

さらに N_d, M_d は円環領域 $\{d/2 < |z - (n+n-d)/2| < d/2 + m - n\}$ に
よって分離されるので, Proposition 1.2.4 より

$$\delta^{\hat{\mathbb{C}}}(N_d, M_d) \leq \frac{2\pi}{\log \frac{d/2 + m - n}{d/2}} = \frac{2\pi}{\log \left(1 + 2 \frac{m-n}{d} \right)}$$

を得る². 以上より

$$\frac{2}{\pi} \log \left(1 + \frac{\min \{\text{diam} f(N_d), \text{diam} f(M_d)\}}{|f(m) - f(n)|} \right) \leq \frac{2\pi K}{\log \left(1 + 2 \frac{m-n}{d} \right)}$$

が成り立つ. これを整理すれば主張を得る. \square

以上の補題から次の判定条件を証明する.

Theorem 4.4.3 (極値的距離の考察により得られる判定条件)

$A \in \mathcal{P}$ は条件 (P)' を満たすとする. 擬等角写像 $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus A$ が存在するならば, 任意の $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ に対してある $n \in \mathbb{Z}$ が存在して以下を満たす. ただし f を \mathbb{C} から \mathbb{C} への擬等角写像に拡張したものも f と表す (4.1 節参照).

$$\text{diam} f([n-d, n]) \leq \varepsilon.$$

² $\omega_1 = 2\pi$ である.

証明

任意に $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ をとり, $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus A$ を K 擬等角写像とする.
 $\varepsilon' > 0$ を

$$\exp\left(\frac{\pi^2 K}{\log(1 + 2/d\varepsilon')}\right) - 1 < \varepsilon$$

を満たすようにとる. このとき Lemma 4.4.1 より, $a \in A$, $k \in \mathbb{Z}$ が存在して以下を満たす.

$$|f^{-1}(a+k) - f^{-1}(a+k-1)| > \frac{1}{\varepsilon'}.$$

ここで, $n = \min\{f^{-1}(a+k), f^{-1}(a+k-1)\}$, $m = \max\{f^{-1}(a+k), f^{-1}(a+k-1)\}$ とおけば $|f(m) - f(n)| = 1$ であるから, Lemma 4.4.2 より

$$\begin{aligned} \min\{\text{diam}f(N_d), \text{diam}f(M_d)\} &\leq \exp\left(\frac{\pi^2 K}{\log\left(1 + 2\frac{m-n}{d}\right)}\right) - 1 \\ &\leq \exp\left(\frac{\pi^2 K}{\log(1 + 2/d\varepsilon')}\right) - 1 < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $N_d = [n-d, n]$, $M_d = [m, m+d]$ とする.

以上より $\min\{\text{diam}f(N_d), \text{diam}f(M_d)\} = \text{diam}f(N_d)$ ならば主張が得られる. また, そうでないときは $m+d$ を改めて n とすれば主張が得られる. \square

Theorem 4.4.3 の条件を $A \in \mathcal{P}$ の条件に書き換えると以下の系が得られる.

Corollary 4.4.4 (極値的距離の考察により得られる判定条件)

$A \in \mathcal{P}$ は条件 (P)' を満たすとする. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が擬等角同相ならば, 任意の $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ に対してある $a \in A$ が存在して以下を満たす³.

$$\#\{D_\varepsilon(a) \cap A\} \geq d.$$

証明

Theorem 4.4.3 において, $f|_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow A$ は全単射であることに注意すれば, $a = f(n)$ と置けばよいことがわかる. \square

³集合 X に対して $\#X$ は X の元の個数を表す.

この判定条件を使えば Example 4.2.4 の A に対して, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が擬等角同相でないことが直ちにわかる. 最後に $A \in \mathcal{D}$ で条件 $(P)'$ を満たし, Theorem 4.2.1 および Theorem 4.4.3, Corollary 4.4.4 によって $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が擬等角同相であるか判定できない例を挙げる.

Example 4.4.5

$$A = \mathbb{Z} + i \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ 2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{\frac{2\pi ki}{n}} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

は Theorem 4.2.1 および Theorem 4.4.3, Corollary 4.4.4 によって $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus A$ が擬等角同相でないと判定することができない.

REFERENCES

- [1] L. V. Ahlfors: “Quasiconformal reflections”, *Acta. Math.*, **109**, pp. 291–301 (1963).
- [2] L. V. Ahlfors: “Lectures on Quasiconformal mappings”, No. 10, Van Nostrand mathematical studies (1966).
- [3] L. V. Ahlfors and A. Beurling: “Conformal invariants and function-theoretic null-sets”, *Acta. Math.*, **83**, pp. 101–129 (1950).
- [4] C. Earle, F. Gardiner and N. Lakic: “Teichmüller spaces with asymptotic conformal equivalence”, I.H.E.S. preprint.
- [5] C. Earle, F. Gardiner and N. Lakic: “Asymptotic Teichmüller space. I. The complex structure, *In the tradition of Ahlfors and Bers* (Stony Brook, NY, 1998)”, *Contemp. Math.*, **256**, pp. 17–38 (2000). Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [6] F. Gardiner and N. Lakic: “Quasiconformal Teichmüller Theory”, Amer. Math. Soc. (2000).
- [7] F. Gardiner and D. Sullivan: “Symmetric structures on a closed curve”, *Amer. J. Math.*, **114**, pp. 683–736 (1992).
- [8] F. W. Gehring: “Characterizations of quasidisks”, Banach Center Publ., 48 Polish Acad. Sci. Warsaw, 1999.
- [9] F. W. Gehring: “A remark on domains quasiconformally equivalent to a ball”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **2**, pp. 147–155 (1976).
- [10] F. W. Gehring: “Univalent functions and the Schwarzian derivative”, *Comment. Math. Helv.*, **52**, pp. 561–572 (1977).
- [11] F. W. Gehring: “Characteristic properties of quasidisks”, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Université de Montréal, Les Presses de l’Université de Montréal éminaire de Mathématiques Supérieures, Université de Montréal, Les Presses de l’Université de Montréal (1982).
- [12] F. W. Gehring and O. Martio: “Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings”, *J. Analyse. Math.*, **45**, pp. 181–206 (1985).
- [13] F. W. Gehring and B. G. Osgood: “Uniform domains and the quasihyperbolic metric”, *J. Analyse. Math.*, **36**, pp. 50–74 (1979).
- [14] V. M. Gol’dšteĭn and S. K. Vodop’janov: “Prolongement des fonctions de classe L_p^1 et applications quasiconformes”, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B*, **290**, pp. A453–A456 (1980).
- [15] J. Hesse: “A p -extremal length and p -capacity equality”, *Ark. Math.*, **13**, pp. 131–144 (1975).
- [16] J. H. Hubbard: “Volume 1 Teichmüller Theory”, Matrix Editions (2006).

- [17] P. W. Jones: “Quasiconformal mappings and extendability of function in Sobolev spaces”, *Acta. Math.*, **147**, pp. 71–88 (1981).
- [18] O. Martio and J. Sarvas: “Injectivity theorems in plane and space”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **4**, pp. 383–401 (1979).
- [19] C. McMullen: “Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps”, *Invent. Math.*, **97**, pp. 95–127 (1989).
- [20] M. Nakai: “On Evans Potential”, *Proc. Japan Acad.*, **38**, no. 9, pp. 624–629 (1962).
- [21] M. Nakai: “Royden’s map between Riemann surface”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72**, pp. 1003–1005 (1966).
- [22] B. G. Osgood: “Univalence criteria in multiply-connected domains”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **260**, no. 2, pp. 459–473 (1980).
- [23] A. Pfluger: “Sur une propriété de l’application quasi conforme d’une surface de Riemann ouverte”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **227**, pp. 25–26 (1948).
- [24] C. Pommerenke: “Boundary Behaviour of Conformal Maps”, Springer-Verlag (1992).
- [25] H. L. Royden: “A property of quasi-conforma mapping”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5**, pp. 266–269 (1954).
- [26] L. Sario: “A linear operator method on arbitrary Riemann surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**, pp. 281–295 (1952).
- [27] O. Teichmüller: “Collected Papers”, Springer-Verlag, Berlin and New York (1982).
- [28] J. Väisälä: “Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1971).
- [29] J. Väisälä: “Uniform domains”, *Tôhoku Math. J.*, **40**, pp. 101–118 (1988).
- [30] M. Vuorinen: “Conformal invariants and quasiregular mappings”, *J. Analyse. Math.*, **45**, pp. 69–115 (1985).
- [31] M. Vuorinen: “Conformal Geometry and Quasiregular Mappings”, Springer-Verlag (1988).
- [32] M. Vuorinen: “On Teichmüller’s modulus problem in \mathbb{R}^n ”, *Math. Scand.*, **63**, pp. 315–333 (1988).
- [33] S. Yang: “A Sobolev extension domain that is not uniform”, *Manuscripta Math.*, **120**, pp. 241–251 (2006).
- [34] 今吉洋一, 谷口雅彦: “タイヒミュラー空間論”, 日本評論社 (1989).
- [35] 柴田良弘: “ルベーク積分論”, 内田老鶴圃 (2006).
- [36] 松崎克彦: “無限次元タイヒミュラー空間の問題”, 数理解析研究所講究録, 第 1731 巻, pp. 28–39 (2011).
- [37] 楠幸男: “函数論—リーマン面と等角写像—”, 朝倉書店 (1973).

