

# 統計力学模型とSLE

中央大学理工学部 香取眞理(かとりまこと)

勉強会「Loewner 方程式とSLE」

2010年2月12 - 14日

東北大学・鳴子会館研究室

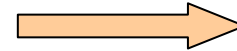
# 0. 概要

## 1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

### 1.1 平面上の統計力学模型の連続極限

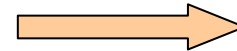
[格子上の離散模型]  $\xrightarrow{\text{連続極限}}$  [連続関数(曲線)空間上の測度]

ループ除去ランダムウォーク  
(loop-erased RW : LERW)



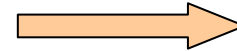
$\mu^{\text{LERW}}$

自己回避ウォーク  
(self-avoiding walk : SAW)



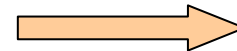
$\mu^{\text{SAW}}$

臨界浸透模型  
(critical percolation model)



$\mu^{\text{per}}$

臨界 Ising 模型  
(critical Ising model)



$\mu^{\text{Ising}}$

### 1.2 共形不変性と領域 Markov 性

共形共変性と共形不変性(conformal cov./inv.)

領域 Markov 性(domain Markov property)

} 上の4つに共通

### 1.3 制限性と局所性

制限性(restriction property)

$\mu^{\text{LERW}}$  : NG,  $\mu^{\text{SAW}}$  : **OK**

局所性(locality property)

$\mu^{\text{Ising}}$  : NG,  $\mu^{\text{per}}$  : **OK**

## 2. 確率解析と Bessel 過程

2.1 Brown 運動, martingale, Ito の公式

2.2  $d$  次元 Bessel 過程 ( $BES_d$ ) の定義

2.3  $BES_d$  の次元性

## 3. Schramm-Loewner Evolution (SLE)

3.1 Riemann の写像定理について

3.2 複素上半平面内の曲線と共形変換

3.3 Loewner の微分方程式

3.4 SLE と  $BES_d$

## 4. SLE と物理系との対応

### 4.1 Schramm のアイデア

共形不変性 + 領域 Markov 性  $\longleftrightarrow \mu^\kappa, \kappa \in (0, \infty)$

### 4.2 局所性と制限性

局所性  $\Leftrightarrow \mu^6$  (SLE<sub>6</sub>)  $\Leftrightarrow \mu^{\text{per}}$

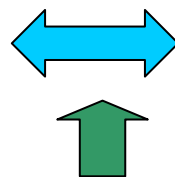
制限性  $\Leftrightarrow \mu^{8/3}$  (SLE<sub>8/3</sub>)  $\Leftrightarrow \mu^{\text{SAW}}$

### 4.3 対応関係

$$c = \frac{(3\kappa-8)(6-\kappa)}{2\kappa}$$

**SLE**

連続関数(曲線)空間上の測度



**境界共形場理論**

Virasoro代数の退化表現(中心元  $c$ )

• 平面上のフラクタル曲線の統計物理 (SLE <sub>$\kappa$</sub>  :  $0 < \kappa \leq 4$ )

LERW, SAW

• 平面上の平衡統計力学模型

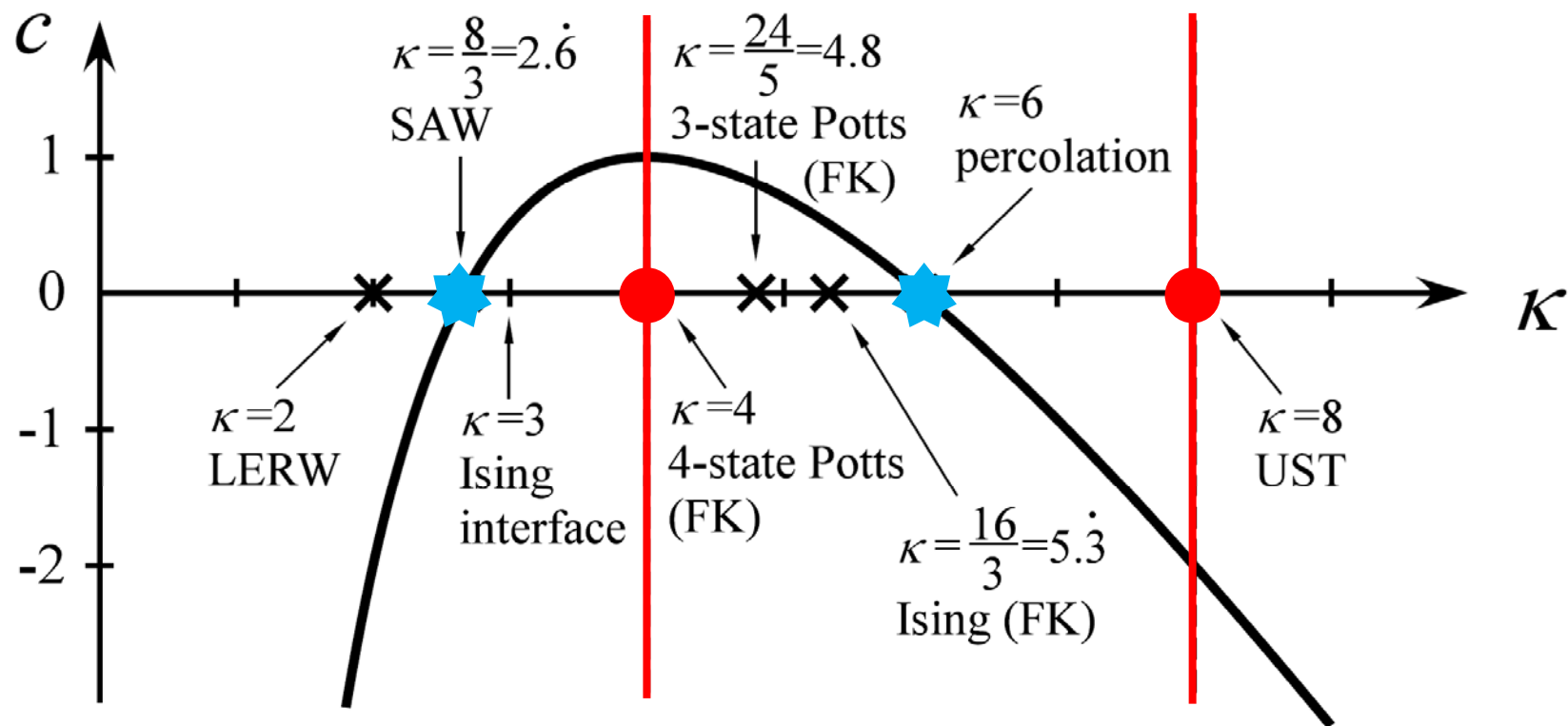
浸透模型(percolation), 磁性体の模型(Ising model)

(SLE <sub>$\kappa$</sub>  :  $4 < \kappa < 8$ )

• ランダムなペアノ曲線と非平衡統計模型(自己組織化臨界現

雪崩模型(Abelian sandpile model), 森林火災模型

(SLE <sub>$\kappa$</sub>  :  $\kappa = 8$ )



- SLE 曲線の径数  $\kappa$  と中心電荷  $c$  との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の  $\kappa$  の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.

# The 2006 Fields Medals



## Wendelin Werner



Laboratoire de  
Mathématiques  
Université Paris-Sud

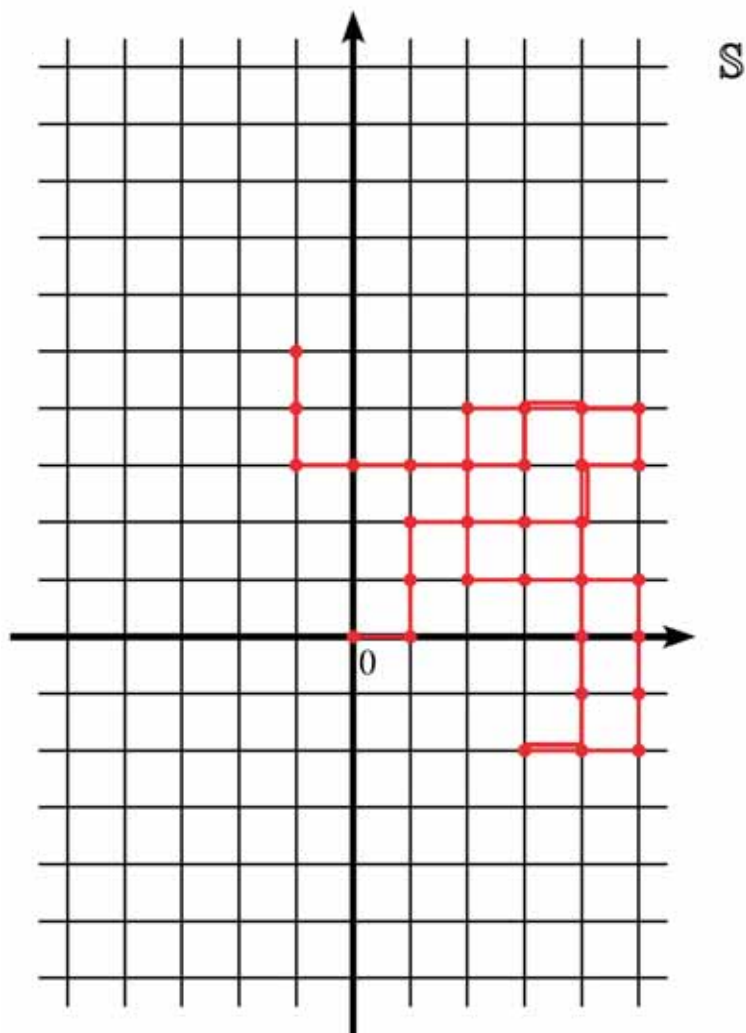
for his contributions to the development of stochastic Loewner evolution, the geometry of two-dimensional Brownian motion, and conformal field theory



- O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.
- G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, American Math. Soc., 2005.
- R. Friedrich and W. Werner, Conformal restriction, highest-weight representations and SLE, *Commun. Math. Phys.* **243** (2003) 105-122.
- S. Smirnov, Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits, *C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I Math.* **333** (2001) 239-244.
- S. Smirnov, Conformal invariance in random cluster models, I. Holomorphic fermions in the Ising model, arXiv:0708.0039.
- V. Beffara, The dimension of the SLE curves, *Ann. Probab.* **36** (2008) 1421-1452.
- 香取眞理, 「臨界現象・フラクタル研究の新世紀 —SLE の発見—」, *日本物理学会誌*, **62** (no.7) (2007) 527-531.

# 1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

## 1.1 平面上の統計力学模型の連続極限



$\mathbf{S}$

複素平面  $\mathbb{C} = \{z = x + \sqrt{-1}y : x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$  上の正方格子  $\mathbf{S} = \{z = j + \sqrt{-1}k : j, k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbf{S}$  上の最近接ウォークの道  $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n))$

出発点  $\omega(0) = z \in \mathbf{S}$

$\omega(i) \in \mathbf{S}, \quad 1 \leq i \leq n$

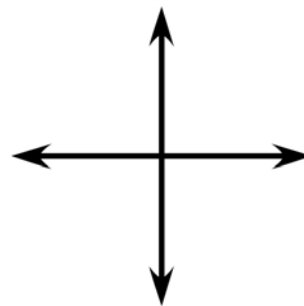
$|\omega(i) - \omega(i-1)| = 1, \quad 1 \leq i \leq n$

$n =$  道の長さ

左図は出発点を  $z = 0$  (原点) とした場合.



$$\begin{aligned}
 \mathbb{S} \quad & \left. \begin{array}{l} \text{出発点が } z \in \mathbb{S} \\ \text{長さが } n \end{array} \right\} \text{の道全体の集合} \\
 & \equiv W_n^z \\
 & = \left\{ \omega = (\omega(0), \dots, \omega(n)) : \omega(0) = z, \right. \\
 & \quad \left. \omega(i) \in \mathbb{S}, |\omega(i) - \omega(i-1)| = 1, 1 \leq i \leq n \right\}.
 \end{aligned}$$

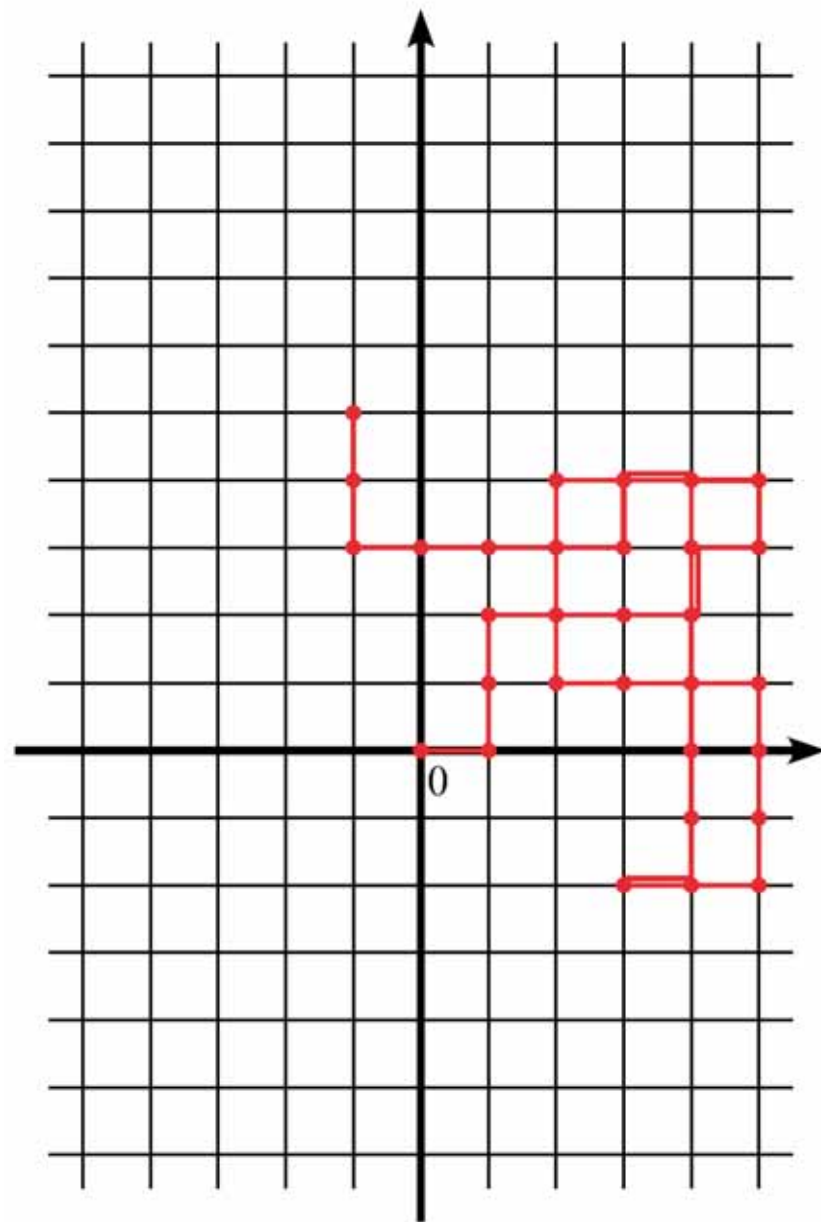


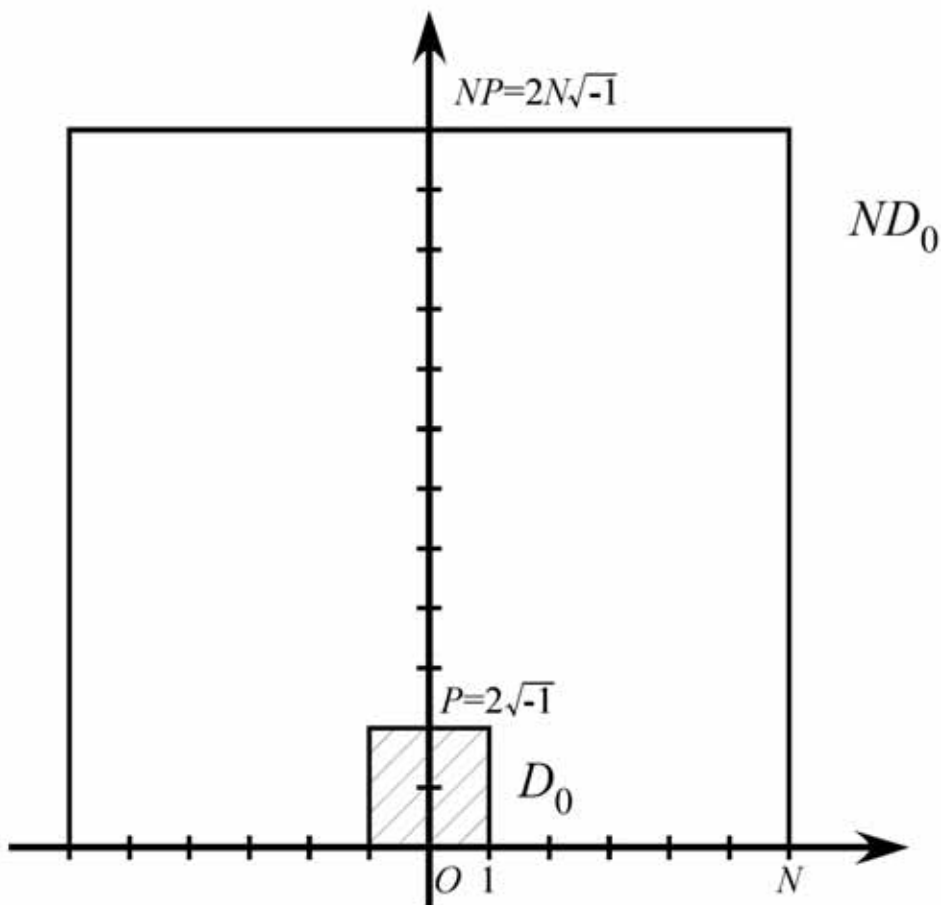
各ステップは上下左右の4通りあるので、 $|W_n^z| = 4^n$ .

(出発点  $z$ , 長さ  $n$  の) ランダムウォーク (random walk : RW)  
 $\equiv W_n^z$  の元の一様分布 (道の統計集団)

定義より、各々の道  $\omega \in W_n^z$  の測度は

$$\frac{1}{|W_n^z|} = \frac{1}{4^n} = 4^{-|\omega|}. \quad \text{ただし、} |\omega| = \text{道 } \omega \text{ の長さ.}$$





- 正方形の開領域

$$D_0 = \{x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$$

$$O = 0 \text{ (原点)} \in \partial D_0$$

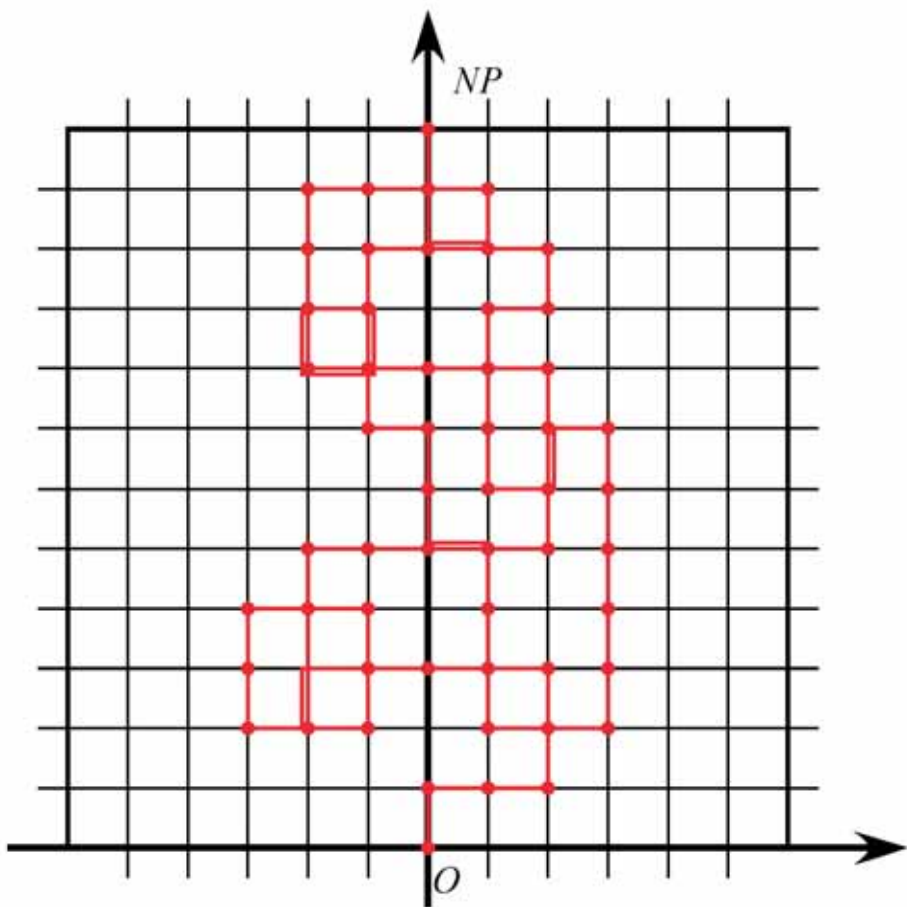
$$P = 2\sqrt{-1} \in \partial D_0$$

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$

$$N \text{ 倍する : } D_0 \longrightarrow ND_0$$

$$NO = 0$$

$$NP = 2N\sqrt{-1}$$



- 正方形の開領域

$$D_0 = \{x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$$

$$O = 0 \text{ (原点)} \in \partial D_0$$

$$P = 2\sqrt{-1} \in \partial D_0$$

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$

$$N \text{ 倍する : } D_0 \longrightarrow ND_0$$

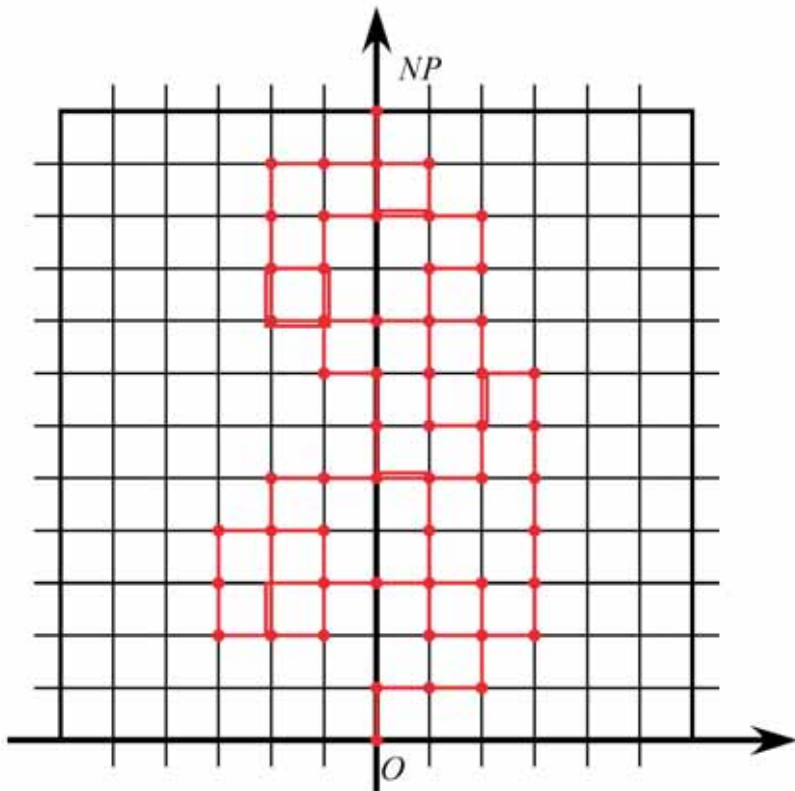
$$NO = 0$$

$$NP = 2N\sqrt{-1}$$

- $\Omega_N(D_0; O, P) \equiv \{\text{RW} : NO \rightsquigarrow NP, \text{道} \subset ND_0\}$

- 分配関数 (=条件付き RW の測度の総和)

$$Z_N(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N(D_0; O, P)} 4^{-|\omega|}$$



ただし

$$f(N) \sim g(N), \quad N \rightarrow \infty$$

$\Updownarrow$

$$\frac{f(N)}{g(N)} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty$$

$$N \rightarrow \infty$$

$$Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P)N^{-2}$$

ここで

$$\begin{aligned} G_{D_0}(z, w) &= \pi \int_0^\infty p_{D_0}(t, w, z) dt \\ &= \text{the Green's function for the complex BM} \\ &\quad \text{stopped at } \partial D_0 \\ &= \text{the Green's function for the Laplacian} \\ &\quad \text{with Dirichlet boundary condition on } D_0 \end{aligned}$$

for  $z, w \in D_0$ ,

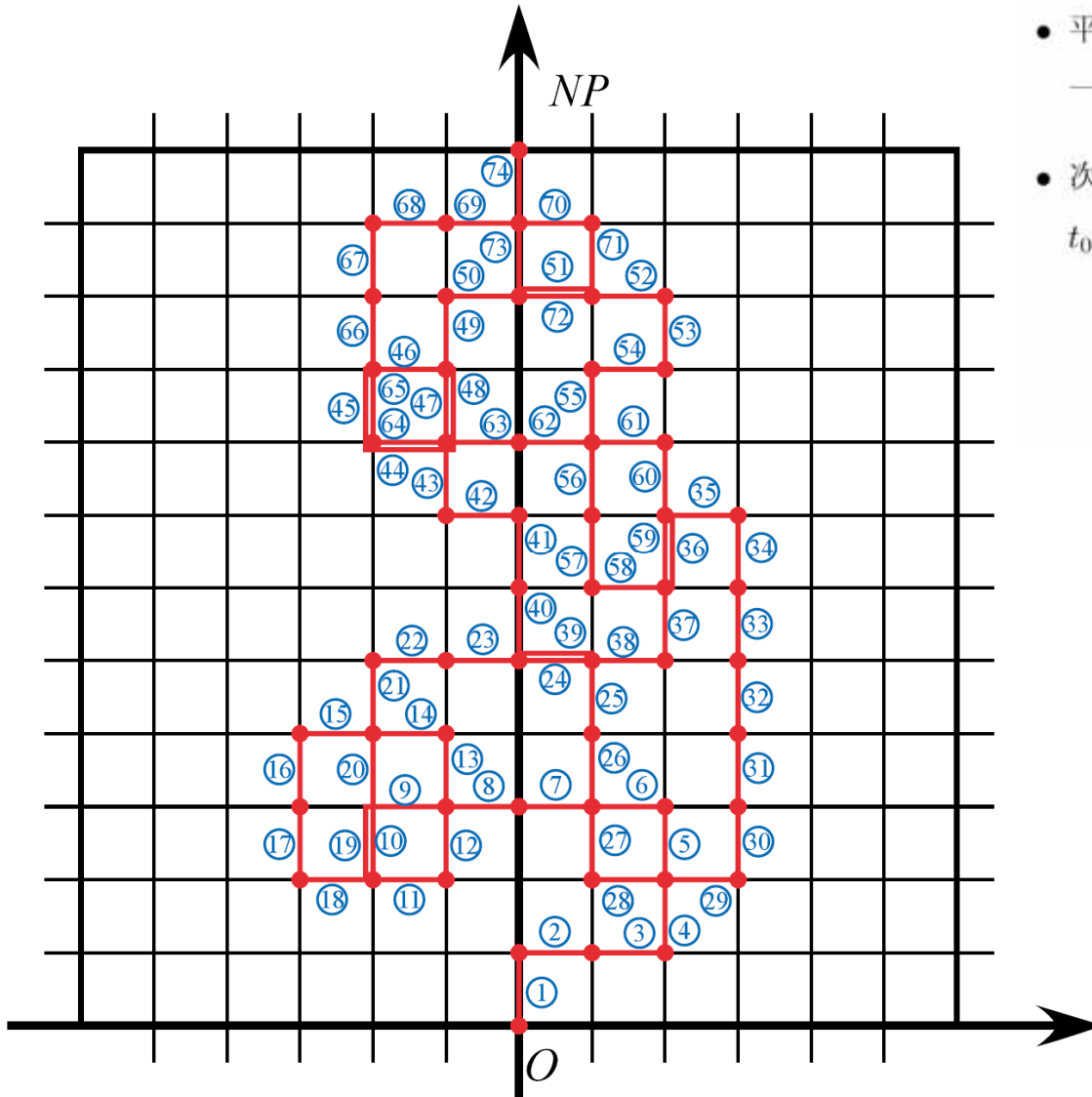
$$\begin{aligned} H_{D_0}(z, w) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon} G_{D_0}(z, w + \varepsilon \mathbf{n}) \\ &= \text{Poisson kernel, for } z \in D_0, w \in \partial D_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{D_0}(z, w) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} H_{D_0}(z + \varepsilon \mathbf{n}_z, w) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} G_{D_0}(z + \varepsilon \mathbf{n}_z, w + \varepsilon \mathbf{n}_w) \\ &= \text{boundary Poisson kernel, for } z, w \in \partial D_0, \end{aligned}$$

としたとき,

$$C(D_0; O, P) = \hat{H}_{D_0}(O, P).$$

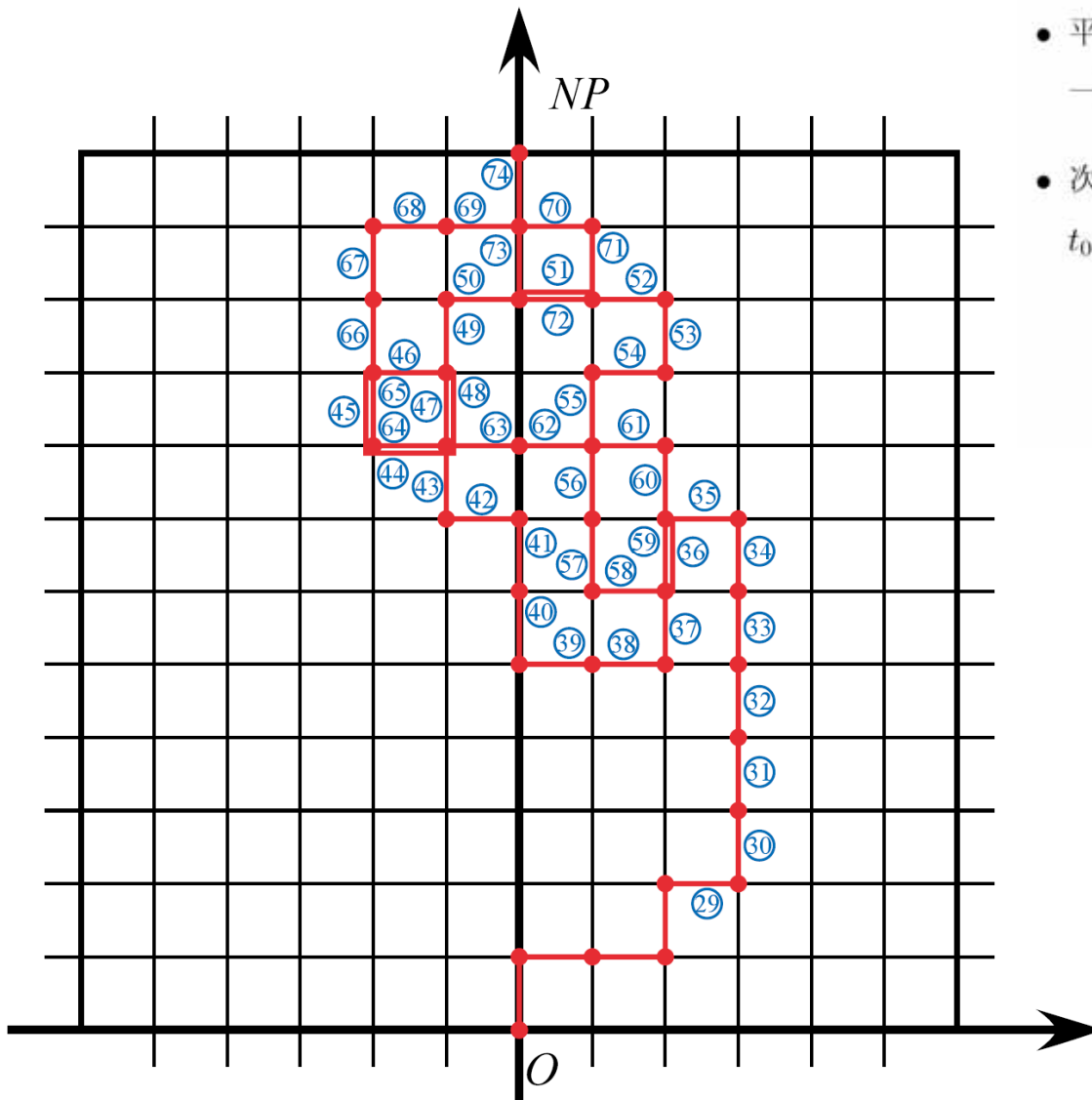
平面上のRW  $\xrightarrow{\text{連続極限}}$  複素ブラウン運動(complex



- 平面上の RW の集合  $\Omega_N(D_0; O, P)$  の元  $\omega$  は一般にはループを持つ(自己交差する).
- 次の操作によってループを消去する:  $\omega \rightarrow \hat{\omega}$   
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$  として,  $m \geq 1$  に対して

$$t_m = \max \left\{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \right\},$$

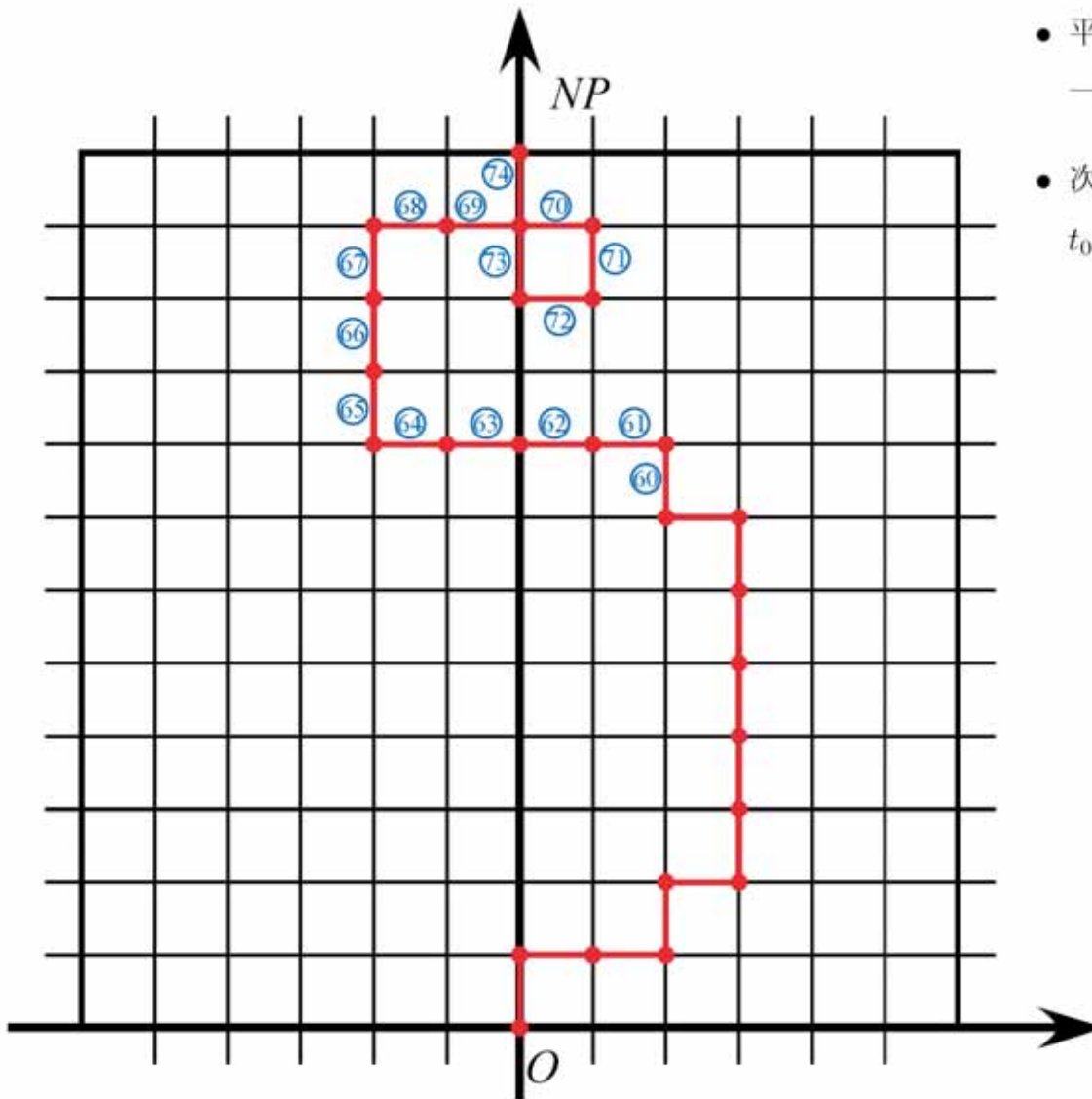
$$\hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1).$$



- 平面上の RW の集合  $\Omega_N(D_0; O, P)$  の元  $\omega$  は一般にはループを持つ(自己交差する).
- 次の操作によってループを消去する:  $\omega \rightarrow \hat{\omega}$   
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$  として,  $m \geq 1$  に対して

$$t_m = \max \left\{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \right\},$$

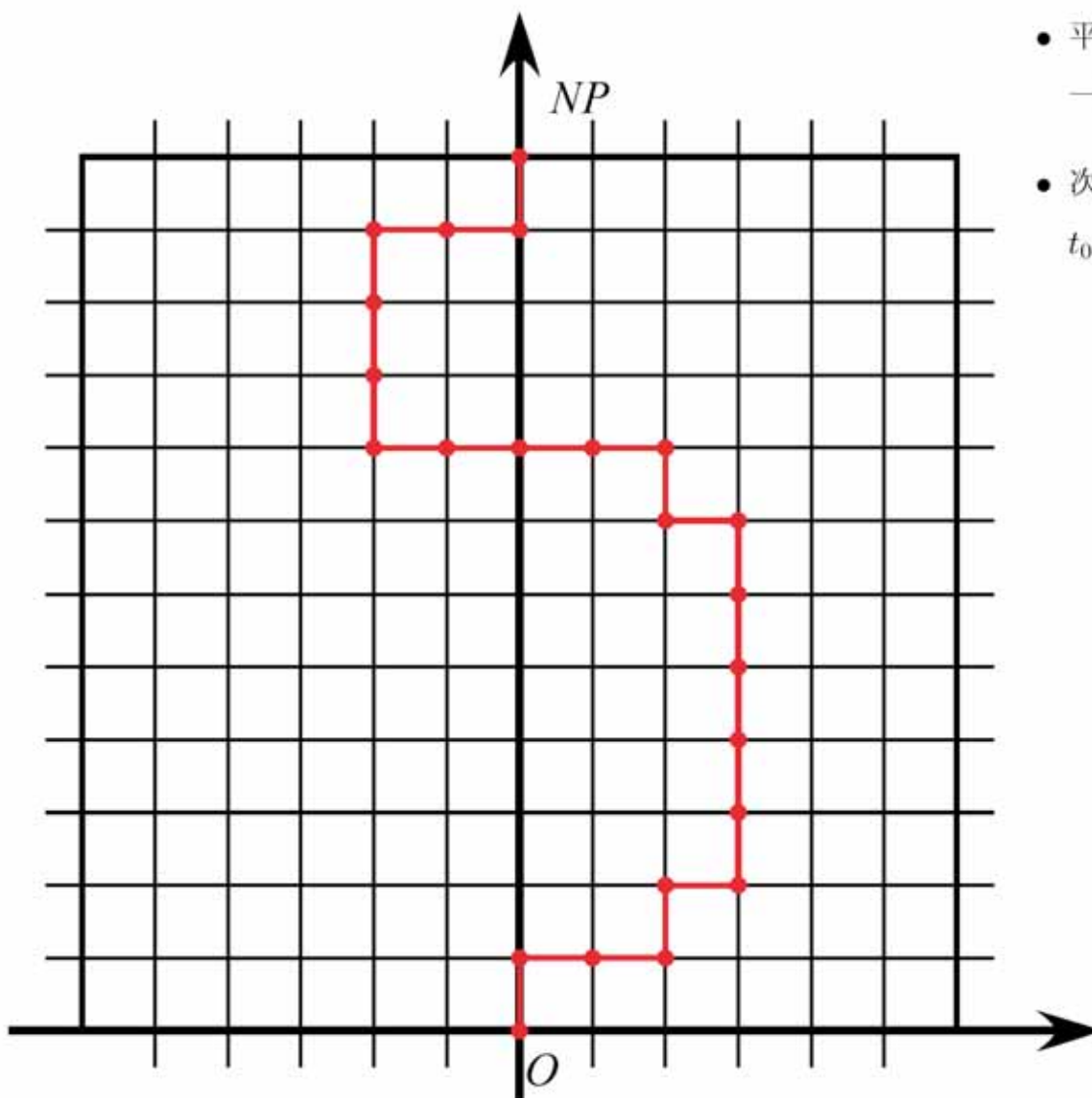
$$\hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1).$$



- 平面上の RW の集合  $\Omega_N(D_0; O, P)$  の元  $\omega$  は一般にはループを持つ(自己交差する).
- 次の操作によってループを消去する:  $\omega \rightarrow \hat{\omega}$   
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$  として,  $m \geq 1$  に対して

$$t_m = \max \left\{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \right\},$$

$$\hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1).$$

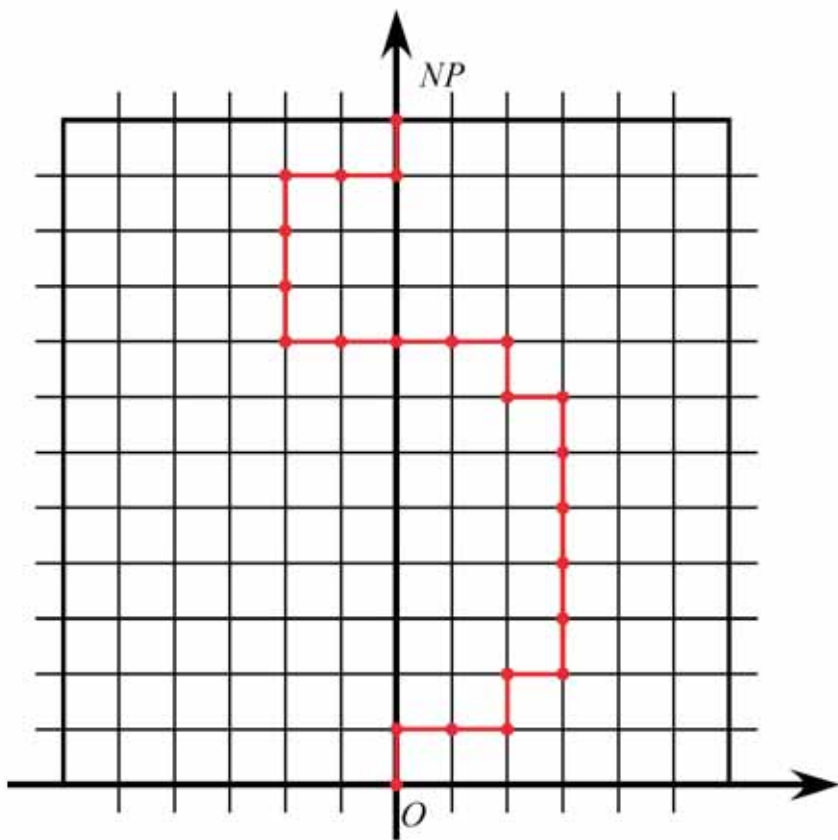


- 平面上の RW の集合  $\Omega_N(D_0; O, P)$  の元  $\omega$  は一般にはループを持つ (自己交差する).
- 次の操作によってループを消去する:  $\omega \rightarrow \hat{\omega}$   
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$  として,  $m \geq 1$  に対して

$$t_m = \max \{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \},$$

$$\hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1).$$





- $\Omega_N^0(D_0; O, P) = ND_0$  内の  $O \rightsquigarrow NP$  のループ無しの道全体

- $\omega \rightarrow \hat{\omega}$ : 多対1対応

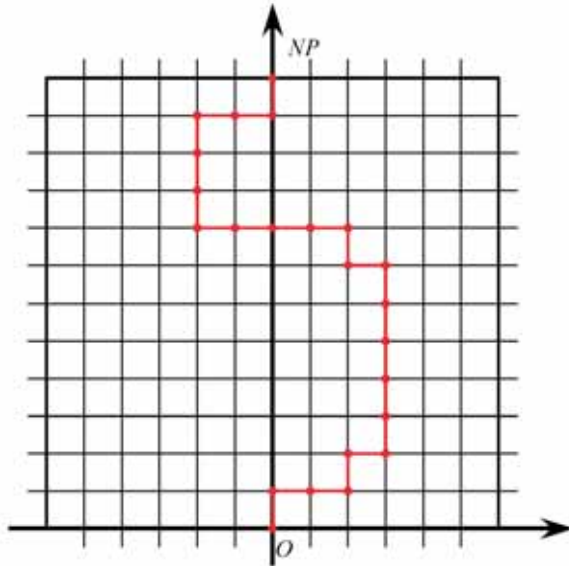
ループ除去前の RW の重みの和  $\sum_{\omega} 4^{-|\omega|}$

↓

ループ除去後の1つの道  $\hat{\omega}$  の重み

- 上のように定義された道の統計集団をループ除去ランダムウォーク (LERW) と呼ぶ.

# ループ除去ランダムウォーク(LERW)の連続極限



$\exists \nu > 0,$

$$\omega^{1/N} \left( \frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i), \quad 0 \leq i \leq |\omega|$$

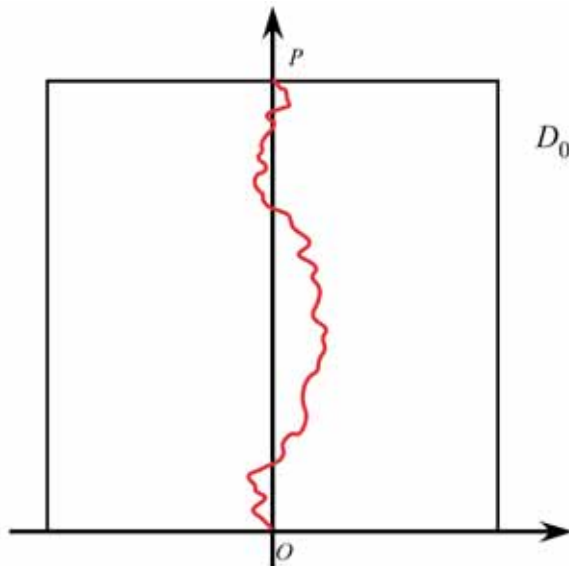
= 原点  $O$  を出発,  $\frac{|\omega|}{N^{1/\nu}}$  ステップ後に  $P = 2\sqrt{-1}$  に到達,

$D_0$  内の (空間刻み  $1/N$  の) ループ無しの道

$\Downarrow \quad N \rightarrow \infty$

$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0$  連続,

$$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty).$$



$D_0$  ただし,  $t_\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} |\omega|/N^{1/\nu}$  :  $P$  への到達時刻 (確率変数)

$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0$  連続,

$$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty)$$

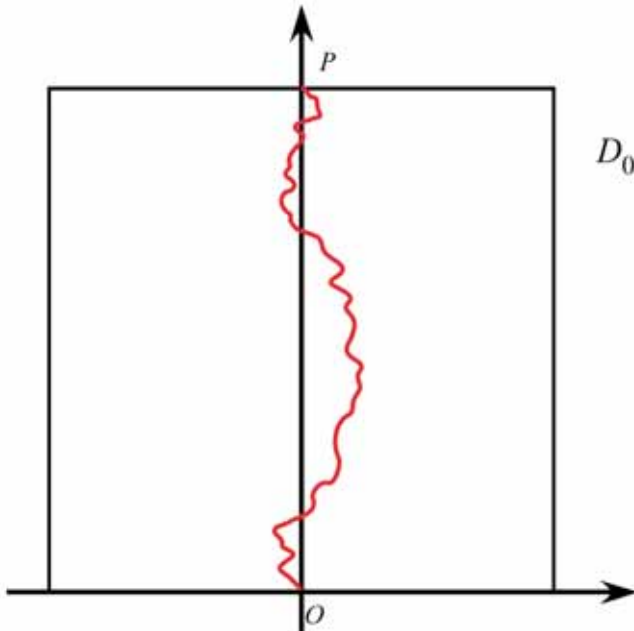
- 曲線  $\gamma$  のフラクタル次元  $d_{\text{LERW}} = \frac{1}{\nu}$
- $\gamma$  は単純曲線:  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), 0 \leq \forall t_1 < t_2 \leq t_\gamma$ .

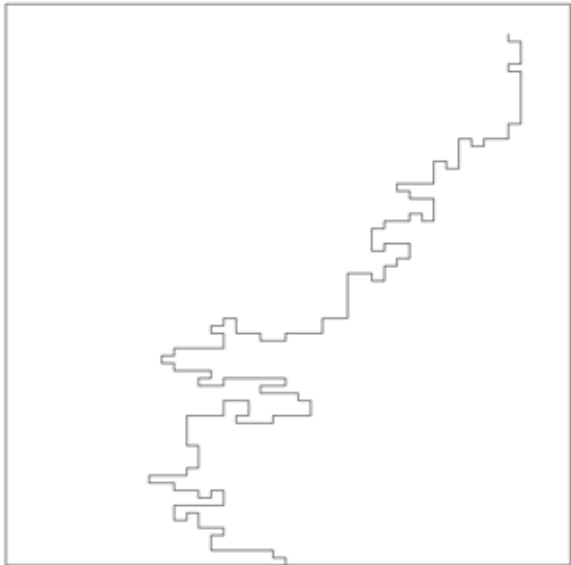
$\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P) \equiv$  LERW の連続極限 (指数  $\nu$  のスケーリング極限) として得られる連続関数  $\gamma$  全体.

$\bar{\mu}_{D_0; O, P}^{\text{LERW}}(\cdot) \equiv$  関数空間  $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$  に対する測度

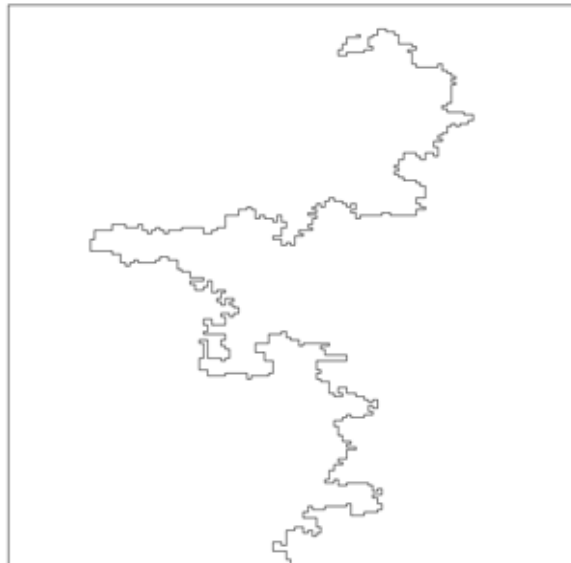
- 総和は (ループ除去前の RW の極限と同じく)  $C(D_0; O, P)$  なので,

$$\begin{aligned} \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) &= \frac{\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot)}{C(D_0; O, P)} \\ &= \mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P) \text{ に台をもつ確率測度} \end{aligned}$$





(a1)



(a2)

- $W_n^z = \{RW : \text{出発点} = z, \text{長さ} = n\}$   
の部分集合 (ループ無しの RW)

$$W_{n,0}^z \equiv \{\omega \in W_n^z, : \omega(i) \neq \omega(j), 0 \leq \forall i < j \leq n\}.$$

- $\exists \beta > 0$  s.t.

$$|W_{n,0}^z| \simeq e^{\beta n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

ただし,  $f(n) \simeq g(n), n \rightarrow \infty$

$$\iff \log f(n) \sim \log g(n), n \rightarrow \infty$$

自己回避ウォーク (self-avoiding walk: SAW)

≡ 自己交差しない (ループ無し) ウォーク  $\omega$  に対して  
それぞれ  $e^{-\beta|\omega|}$  の測度を与えた統計集団.

左図(a1)は  $n=200$  ステップ, (a2) は  $n=800$  ステップ

SAW の分配関数

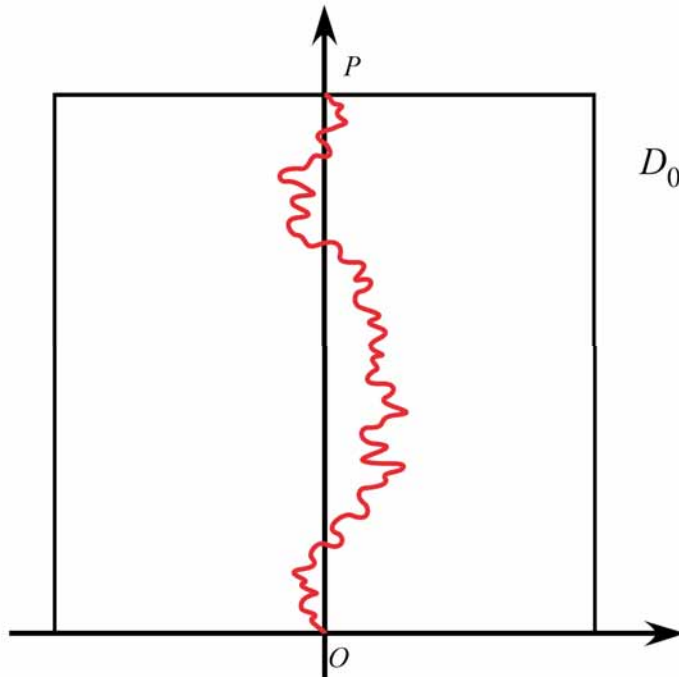
$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N^0(D_0; O, P)} e^{-\beta|\omega|}$$

- $\exists b_{\text{SAW}} > 0$ , s.t.

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \sim C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) N^{-2b_{\text{SAW}}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

- $\exists \nu = 1/d_{\text{SAW}}$ , s.t.

$$\omega^{1/N} \left( \frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i) \implies \gamma(t), \quad N \rightarrow \infty.$$



SAW の連続極限に対する測度

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot) = C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot)$$

比較

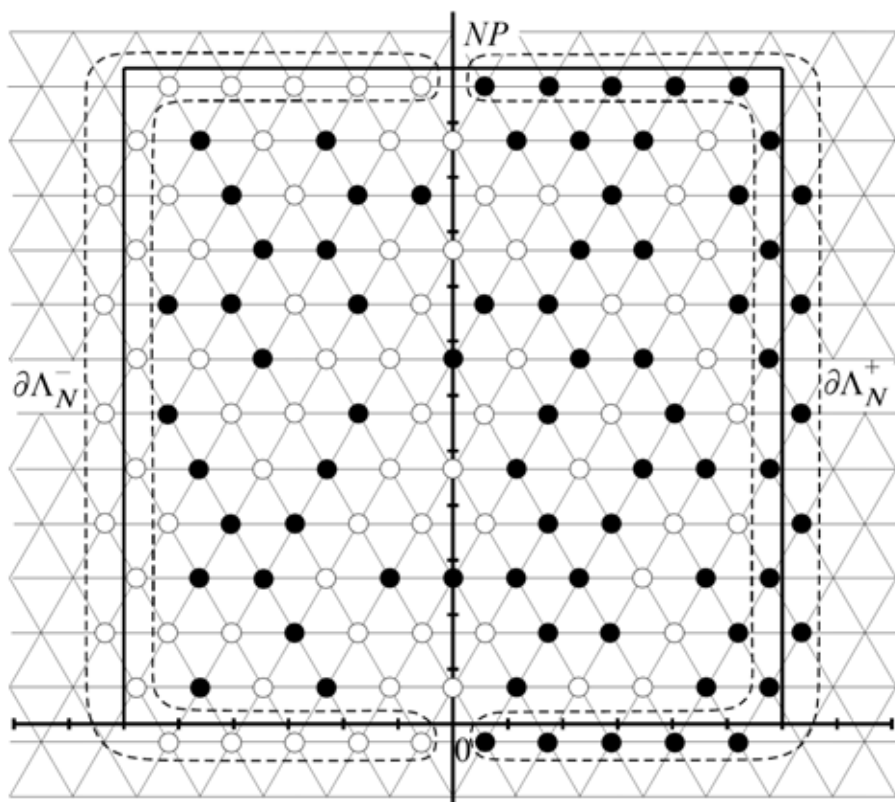
- RW と LERW では

$$Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P) N^{-2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

つまり,  $b_{\text{RW}} = b_{\text{LERW}} = 1$ .

- $d_{\text{LERW}} \neq d_{\text{SAW}}$

# 臨界浸透模型 (critical percolation model)



- ここでは  $\mathbb{C}$  上に三角格子を置く：

$$\tau = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3) \text{ として}$$

22

$$\mathbf{T} = \{z_0 + (i + j\tau)\sqrt{3}a : i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

ただし,  $a = \frac{2}{3}$  として  $z_0 = a\sqrt{-1}$  とする.

- 確率変数  $\eta(z) \in \{0, 1\}$ ,  $z \in \mathbf{T}$   
Bernoulli 測度  $\nu_p$  で分布：

$$\nu_p(\eta(z) = 1) = p, \quad \nu_p(\eta(z) = 0) = 1 - p.$$

- 三角格子  $\mathbf{T} \iff$  繊維表面  
 $\eta(z) = 1 \iff$  濡れた部位  
 $\eta(z) = 0 \iff$  乾いた部位

## 浸透現象の模型

- 浸透相転移 (percolation transition)

$p \leq \frac{1}{2}$  : ある 1 点を含む連結浸透領域は  
確率 1 で有界

$p > \frac{1}{2}$  :  $\text{Prob}(\text{非有界}) > 0$

$p = p_c = \frac{1}{2}$  : 臨界値

以下  $p = p_c = \frac{1}{2}$  とする.

- $N \in \mathbb{N}, \mathbf{T} \cap ND_0 = \Lambda_N$   
(左図は  $N = 6$  の場合)

- Dobrushin 境界条件

$$\eta(z) = 1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^+$$

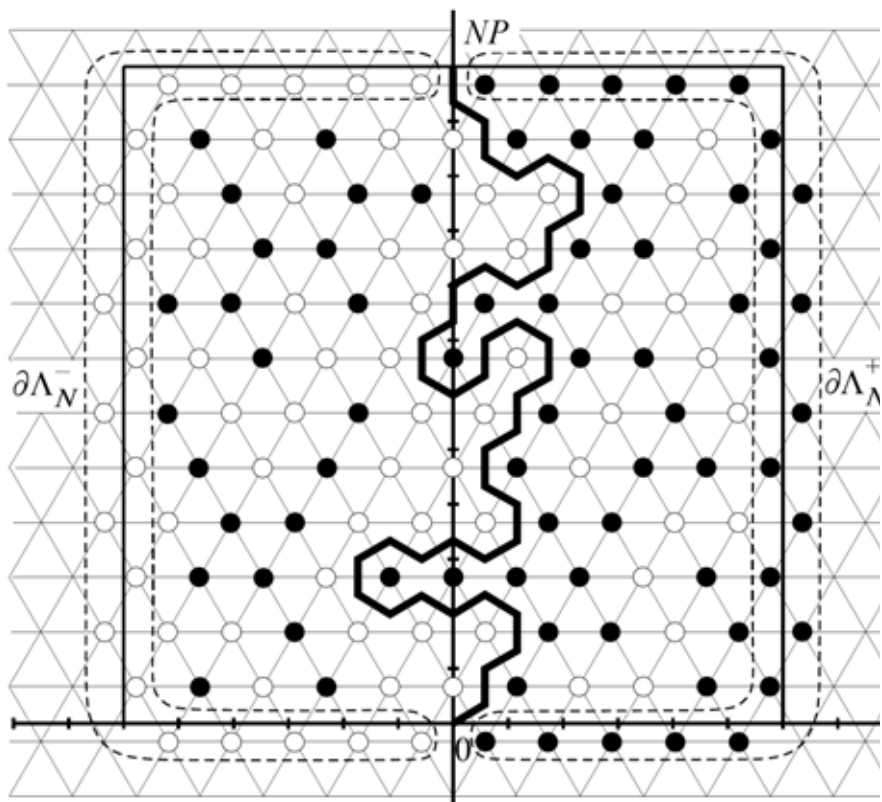
$$\eta(z) = 0, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^-$$

- これ以外の領域  $\Lambda_N$  内部の配置：  
 $\nu_{1/2}$  に従ってランダムに分布

- 浸透探索過程

(percolation exploration process)

$\omega$ : 道の進行方向すぐ左側は 0 (白丸)  
道の進行方向すぐ右側は 1 (黒丸)



## 浸透探索過程の連続極限

浸透探索過程  $\omega$

$N \rightarrow \infty \quad \downarrow \quad$  スケーリング極限 (指数  $\nu = 1/d_{\text{per}}$ )

$\gamma$ : 連続曲線

これは単純曲線ではない.

- Bernoulli 測度なので

測度の総和 (分配関数)  $Z_N^{\text{per}}(D_0; O, P) \equiv 1$

よって  $N^{-2b_{\text{per}}} = 1 \iff b_{\text{per}} = 0$

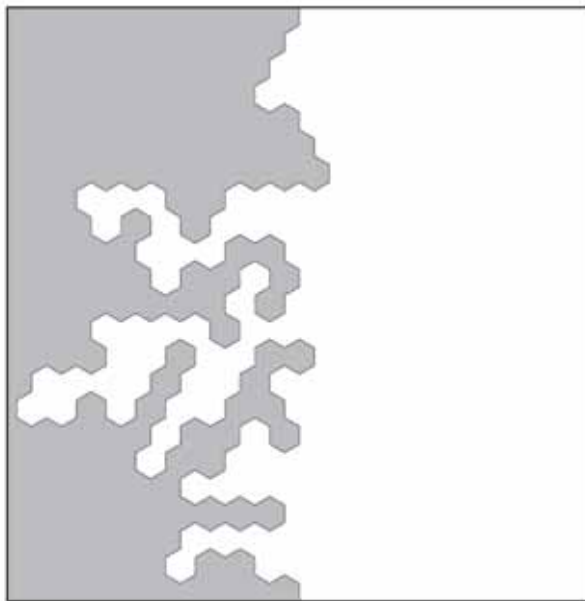
- 浸透探索過程の連続極限  $\gamma$

に対する確率測度を

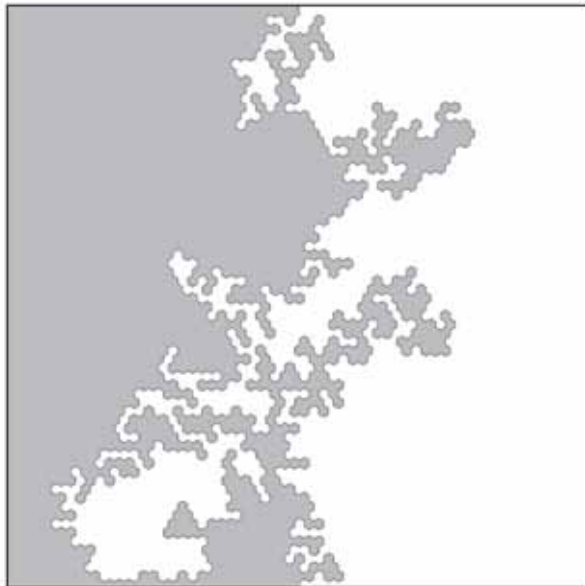
$\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\cdot)$  と記す.

左図 (b1) は  $35 \times 35$  三角格子上,

(b2) は  $100 \times 100$  三角格子上



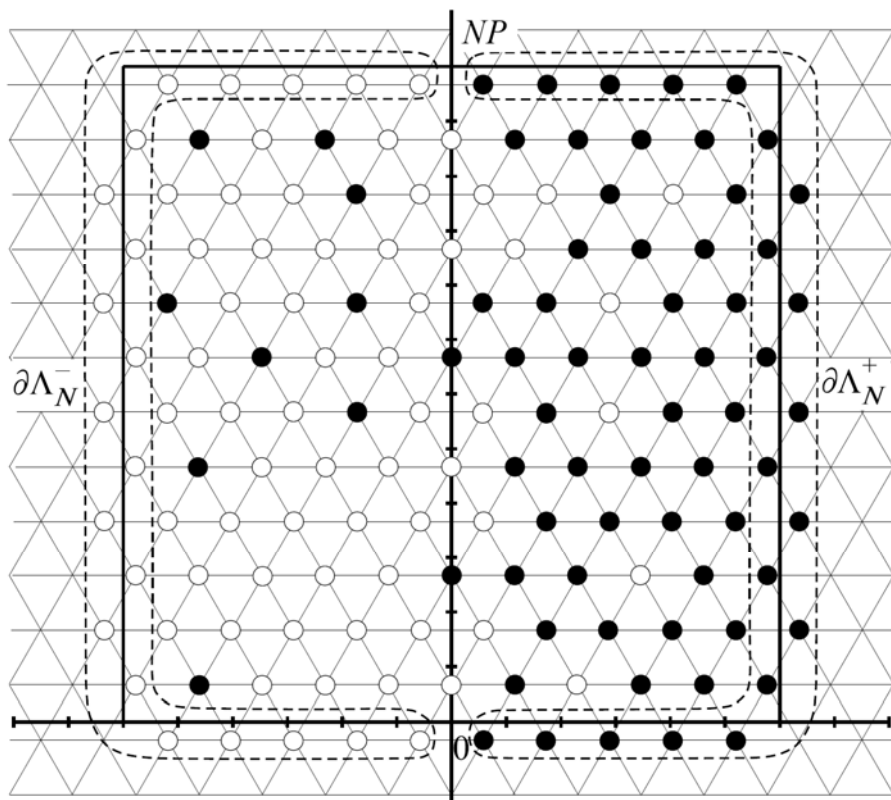
(b1)



(b2)



# 臨界 Ising 模型 (critical Ising model)



- $\bar{\Lambda}_N = \Lambda_N \cup \partial\Lambda_N^+ \cup \partial\Lambda_N^-$

- 確率変数 (スピン)

$$\sigma(z) \in \{-1, 1\}, \quad z \in \bar{\Lambda}_N$$

- Dobrushin 境界条件

$$\sigma(z) = 1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^+$$

$$\sigma(z) = -1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^-$$

- 領域内部  $\Lambda_N^0$  のスピンは

径数  $\beta > 0$  の Gibbs 測度でランダムに配置:

$$\pi_{N,\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta E(\sigma)}}{Z_{N,\beta}}$$

ただし,

$$E(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{z,z' \in \bar{\Lambda}_N: |z-z'|=\sqrt{3}a} \sigma(z)\sigma(z')$$

$$Z_{N,\beta} = \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^{\Lambda_N^0}} e^{-\beta E(\sigma)}$$

- 磁気相転移 (magnetic phase transition)

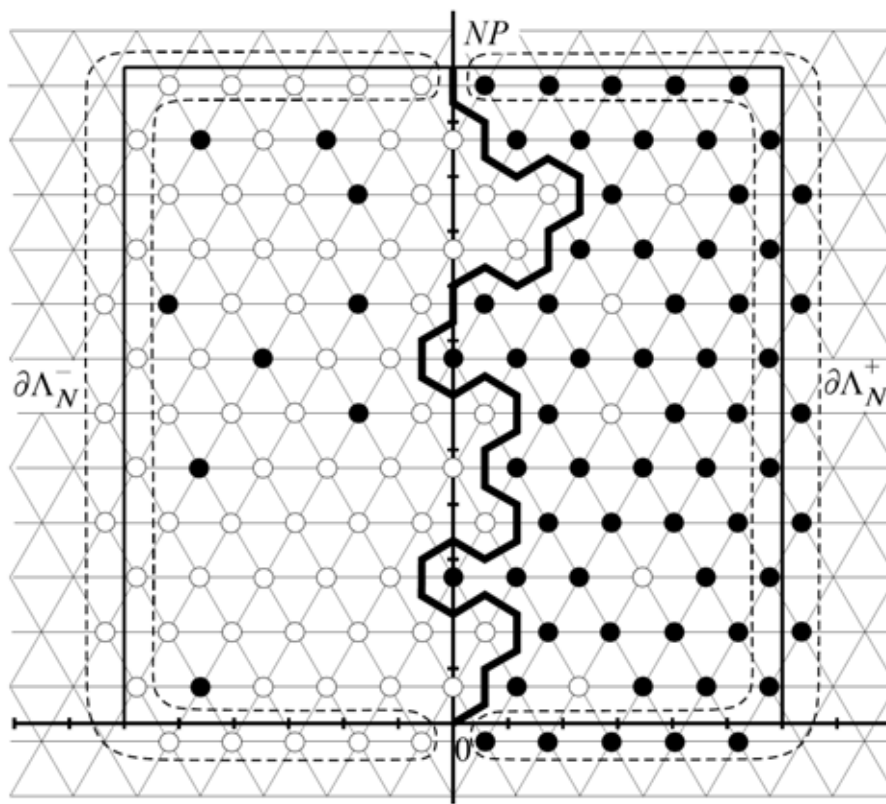
$\beta = J/kT < \beta_c$  ( $T > T_c$ ): 常磁性相

$\beta = J/kT > \beta_c$  ( $T < T_c$ ): 強磁性相

$\beta = J/kT = \beta_c$  ( $T = T_c$ ): 臨界点 (Curie 温度)

$$e^{-2\beta_c} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta_c = \frac{1}{4} \log 3 = 0.27465 \dots$$

# Ising 界面(Ising Interface)



以下  $\beta = \beta_c$  ( $T = T_c$ ) とする.

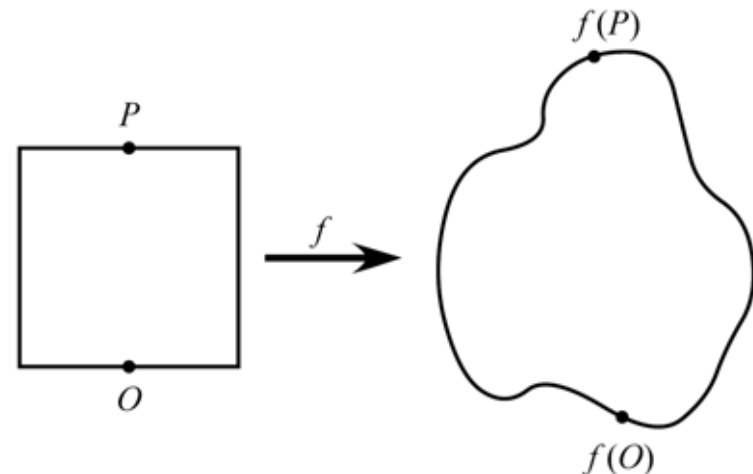
- $\omega$  : Ising 界面 (Ising interface)  
 $N \rightarrow \infty$   $\Downarrow$  スケーリング極限  
 (指数  $\nu = 1/d_{\text{Ising}}$ )
- $\gamma$  : 連続曲線  
 これは単純曲線.
- Ising 界面の連続極限  $\gamma$   
 に対する測度を  
 $\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{Ising}}(\cdot)$  と記す.

## 1.2 共形不変性と領域 Markov 性

$f : D_0 \subset \mathbb{C}$  上で正則,  $f'(z) \neq 0, \forall z \in D_0$  のとき

$f : D_0 \rightarrow f(D_0)$ : 共形変換 (等角写像)

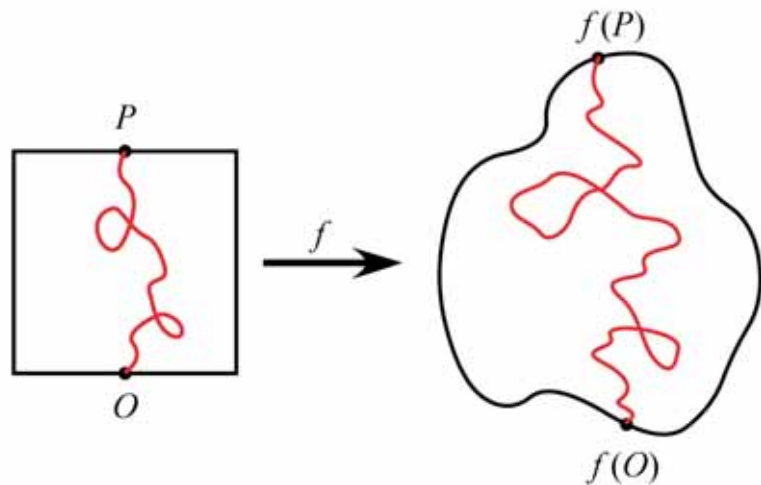
ただし,  $\partial D_0 \rightarrow f(\partial D_0), O \rightarrow f(O), P \rightarrow f(P)$  とする.



1.1 節で述べた平面格子上の統計力学模型の連続極限に伴って得られる連続関数  $\gamma$  に対する測度

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = C(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}(\cdot)$$

の共形変換  $f$  による変換性を考える.

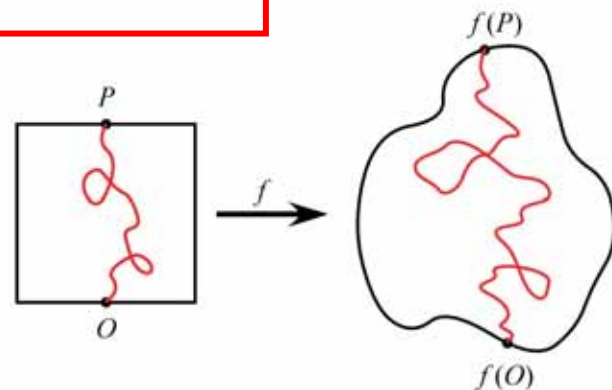


# 次の2つの変換性を持つことが期待される。 共形共変性と共形不変性

任意の共形変換に対して,

$$f \circ \bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b \bar{\mu}_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot)$$

指数  $b$  = 1.1 節の格子上的模型の分配関数の  
領域サイズ  $N \rightarrow \infty$  に伴う漸近挙動で決まる値  
= (上の式の形から) **境界スケーリング指数**  
(boundary scaling exponent) と呼ばれる



上式は測度の総和 (分配関数) の**共形共変性**と  
確率測度の**共形不変性**を意味する：

$$C(D_0; O, P) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b C(f(D_0); f(O), f(P)),$$

$$\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot) = \mu_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot).$$

1.1 節の

$$Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P)N^{-2}, \quad N \rightarrow \infty$$

や

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \sim C^{\text{SAW}}(D_0; O, P)N^{-2b_{\text{SAW}}}, \quad N \rightarrow \infty$$

は、格子上の大きな領域  $ND_0$  内での道の測度を、 $1/N$  に縮小した単位領域  $D_0$  内での道の測度に変換したときの変換性を示したものと見なせる。縮小変換  $f$  も共形変換であり、 $f'(z) \equiv 1/N$  である。これより、

$$f \circ \bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b \bar{\mu}_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot)$$

に現れる境界スケーリング指数  $b$  は、1.1 節の  $N \rightarrow \infty$  に伴う分配関数の減衰を表す指数  $b$  と同一視できる。

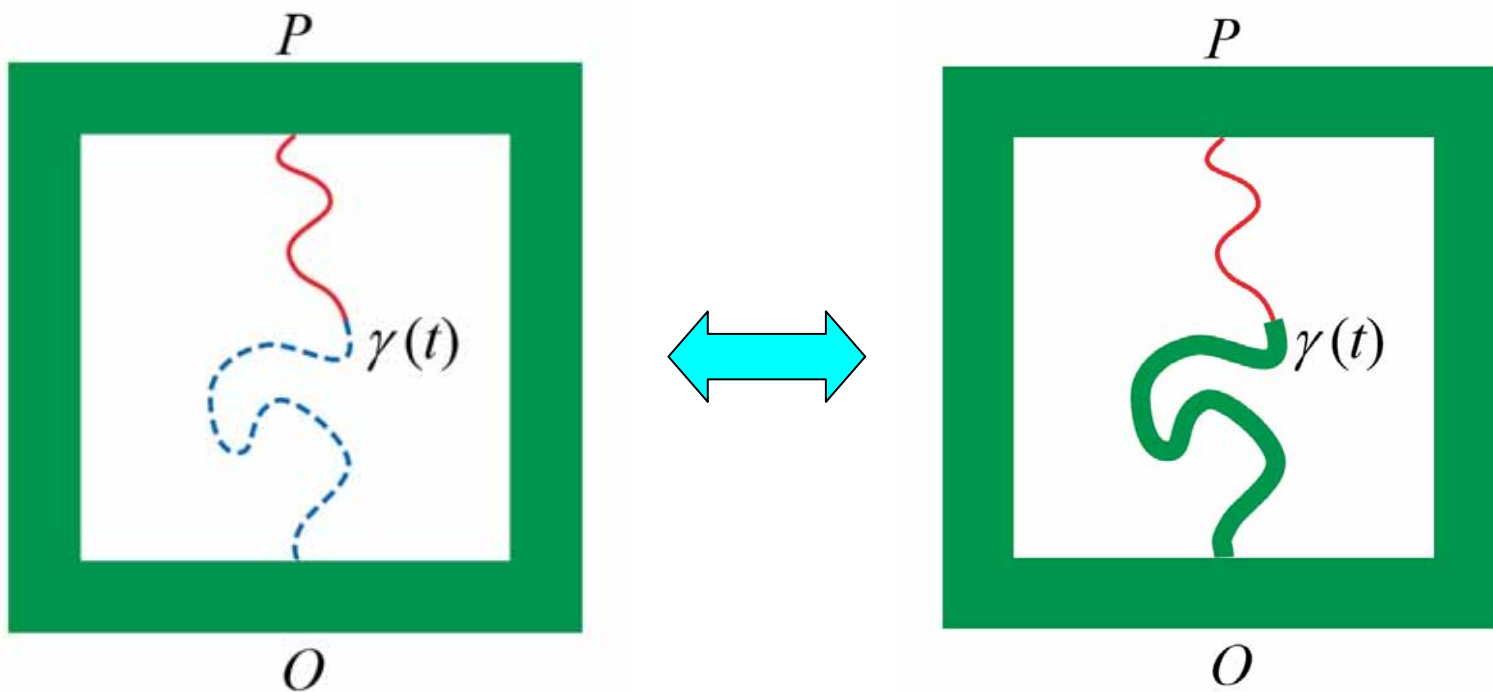
# 領域 Markov 性

$\mu_{(D_0; O, P)}$  の下で、曲線  $\gamma$  の初期の一部分  $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$  を観測する。

この条件の下での曲線の残りの部分の分布は、 $D_0$  から  $\gamma(0, t]$  を除いた開領域で、 $\gamma(t)$  を出発点として  $\gamma(t_\gamma) = P$  を終点とする曲線の分布に等しい：

$$\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot \mid \gamma(0, t]) = \mu_{(D_0 \setminus \gamma(0, t]; \gamma(t), P)}(\cdot).$$

この性質を領域 Markov 性と言う。



## 注: 曲線の径数付けについて

$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0$  連続,

$$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty)$$

曲線  $\gamma$  は変数  $t \in [0, t_\gamma]$  (時間と見なす) の連続関数.  
共形変換によって, 時間はどのように変換 (時間変更) されるべきか.

- ウォーク  $\omega$  のスケールリング性

$$\omega^{1/N} \left( \frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i), \quad 0 \leq i \leq |\omega|$$

↓

像曲線  $f \circ \gamma$  上の

区間  $f(\gamma[t_1, t_2]), 0 < t_1 < t_2 < t_\gamma$ , の移動時間

$$= \int_{t_1}^{t_2} |f'(\gamma(s))|^d ds,$$

( $d$  は曲線  $\gamma$  のフラクタル次元.)

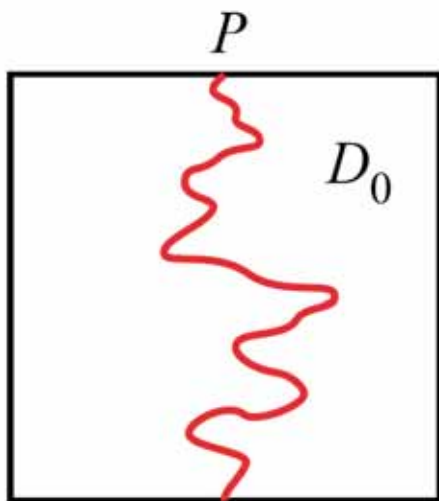
- 曲線の径数付けの違い (時間変更の違い) を無視して考えることもある.

$$\gamma(t) = \gamma(\theta(t)) :$$

$$\forall \text{ 増加同相写像 } : \theta : [0, t_\gamma] \rightarrow [0, t_\gamma]$$

# 1.3 制限性と局所性

## 制限性 (restriction property)

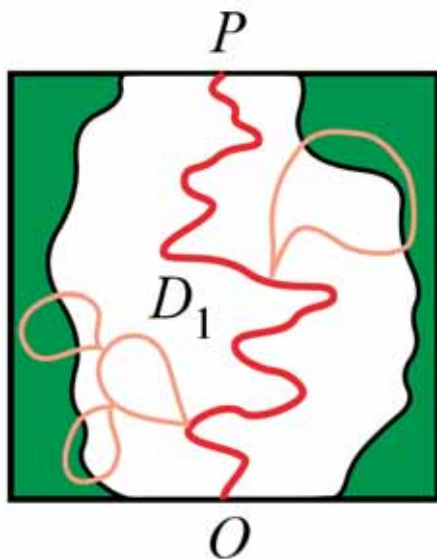


$D_1$  : 単連結領域,  $D_1 \subset D_0$ . ただし,  $O, P \in \partial D_1$ .

- 部分領域  $D_1$  で LERW を考える.

↓

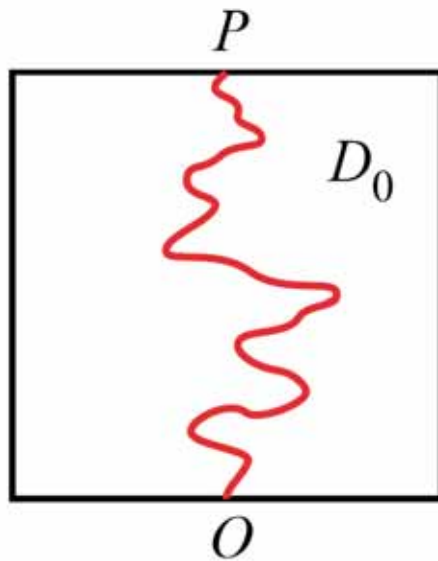
$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1;O,P)}^{\text{LERW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{LERW}}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$





# 1.3 制限性と局所性

## 制限性 (restriction property)

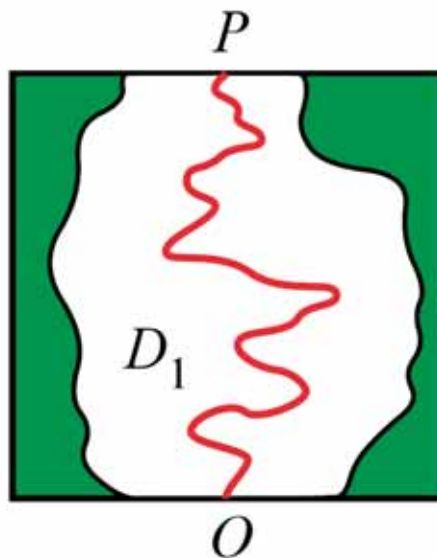


$D_1$  : 単連結領域,  $D_1 \subset D_0$ . ただし,  $O, P \in \partial D_1$ .

- 部分領域  $D_1$  で LERW を考える.

↓

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1;O,P)}^{\text{LERW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{LERW}}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$

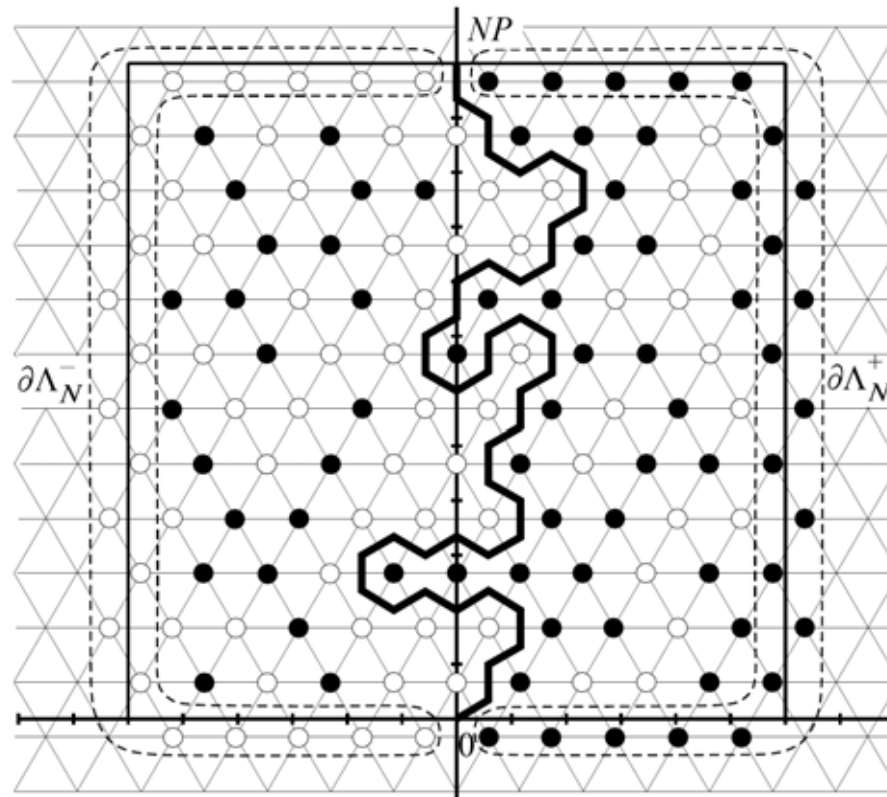


- しかし, SAW の連続極限の測度においては

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1;O,P)}^{\text{SAW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}} = \mathbf{1}\{\gamma(0, t_\gamma) \subset D_1\}, \quad D_1 \subset D_0$$

が成立する. これを制限性という.

# 局所性(locality property)



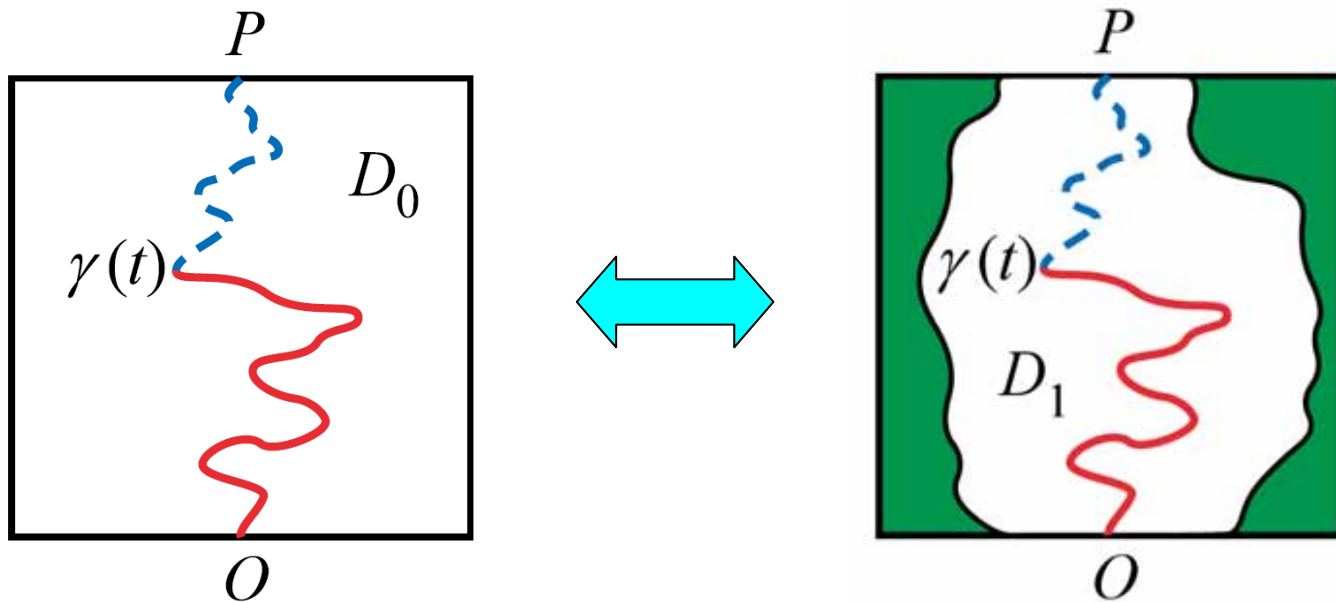
浸透探索過程  $\omega$

Bernoulli 測度  $\nu_p \implies$  局所性

# 局所性(locality property)

$D_1$  : 単連結領域,  $D_1 \subset D_0$ ,  $O, P \in \partial D_1$ .

$$\mu_{(D_1; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) = \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) \mathbf{1}\{\gamma(0, t] \subset D_1\}, \quad \forall t \in (0, t_\gamma).$$



- Ising 界面の連続極限の測度  $\bar{\mu}^{\text{Ising}}$  には局所性は期待できない.
- 制限性は曲線全体  $\gamma(0, t_\gamma)$  の性質であるが, 局所性は任意の初期部分  $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$  に対して成り立つべき性質であり, より強い**独立性**である.

## 2 確率解析とベッセル過程

### 2.1 ブラウン運動, マルチンゲール, 伊藤の公式

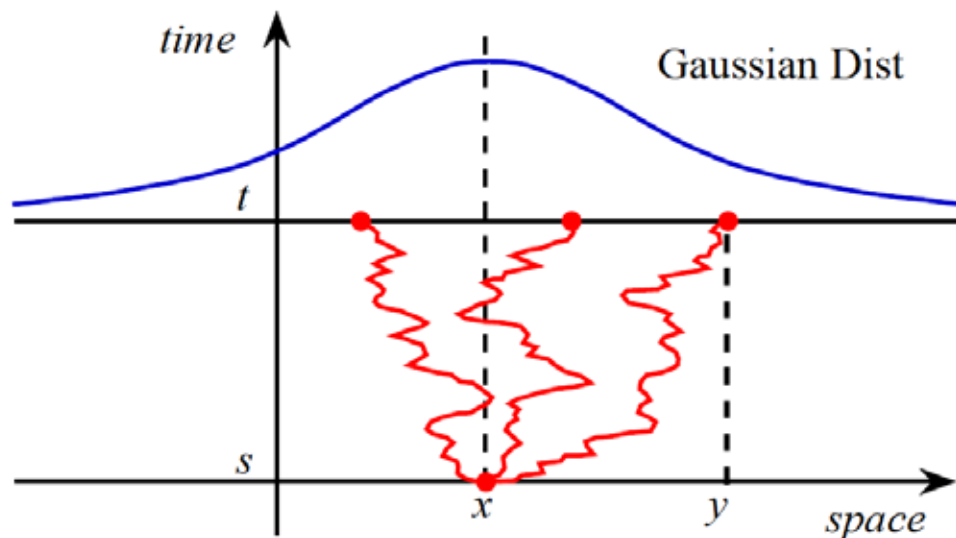
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とする. ここで  $\Omega$  は標本空間,  $\Omega$  の部分集合  $A \subset \Omega$  は事象を表すが,  $\mathcal{F}$  はこの事象の全体であり,  $\sigma$ -加法族をなす. (すなわち, (i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ , (ii)  $A \in \mathcal{F}$  なら  $A$  の補集合  $A^c \in \mathcal{F}$ , (iii)  $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$  なら  $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$ , という 3 条件を満たす.) また  $\mathbb{P}$  は確率分布関数 (確率法則) を表す.  $\Omega$  上に定義される実数値関数  $f$  が  $\mathcal{F}$ -可測とは, 任意の実数  $a$  に対して,  $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$  であることを言う.
- 確率過程は確率変数の時間発展である. 過去の軌跡を「情報」と見るとき, 情報の増大系が得られることになる. これを表すのがフィルトレーション (filtration, 情報系)  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  である. これは, (i)  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, 0 \leq s < t$ , (ii) 各  $t$  に対して  $\mathcal{F}_t$  は  $\sigma$  加法族をなす, という 2 条件を満たすものである.  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  をフィルター付き確率空間と言う.

- 1次元標準  $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動 (Brownian motion) とは, 次を満たす確率過程  $B_t$  である. (以下, 特に断りのないときには, これを単にブラウン運動とよび, BM と略記することにする.)

- (i) 各  $0 < s < t$  に対して,  $B_t - B_s$  は  $\mathcal{F}_t$ -可測であり,  $\mathcal{F}_s$  と独立である. その分布は, 平均 0, 分散  $t - s$  の正規分布である;

$$\mathbb{P}\left(B_t - B_s \in [a, b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\} dx. \quad (2.1)$$

- (ii) 確率 1 で,  $t \mapsto B_t$  は連続. すなわち,  
 $\exists \tilde{\Omega} \subset \Omega$  s.t.  $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$  かつ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  のとき  $B_t(\omega)$  は  $t$  の連続関数.



- (i) の性質から, 任意の  $c > 0$  に対して,  $\frac{1}{c}B_{c^2t}$  の分布と  $B_t$  の分布は等しいことが分かる. これを

$$\frac{1}{c}B_{c^2t} \stackrel{d}{=} B_t \quad \forall c > 0 \quad (2.2)$$

と書くことにする. (d は distribution の意味.) これを, **BM のスケーリング性 (scaling property)** と言う.

- $B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d$  が独立な BM であるとき,  $\mathbf{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$  を  $d$  次元 BM と言う.
- $B_t^1$  と  $B_t^2$  が独立な BM であるとき  $\mathcal{B}_t = B_t^1 + \sqrt{-1}B_t^2$  を (標準) 複素 BM と言う.

**注 2.1.** 特に断りのないときは,  $\mathbb{P}(\mathbf{B}_0 = 0) = 1$ , つまり, ( $d$ 次元)BMは原点からスタートするものとする. 一般化して,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$  (あるいは  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ ) に対して,  $\mathbf{z}$  からスタートした ( $d$ 次元)BMを考えたいときには,  $\mathbf{z}$  だけ空間座標をずらして  $\mathbb{P}^{\mathbf{z}}(\mathbf{B}_t \in \cdot) \equiv \mathbb{P}(\mathbf{B}_t + \mathbf{z} \in \cdot)$  とする. こうすれば  $\mathbb{P}^{\mathbf{z}}(\mathbf{B}_0 = \mathbf{z}) = 1$  となる.

- $\mathbb{P}$  (または  $\mathbb{P}^{\mathbf{z}}$ ) に関する期待値 (expectation) を  $\mathbb{E}$  (または  $\mathbb{E}^{\mathbf{z}}$ ) と書くことにする.
- $Z_t$  を確率過程とする. 条件付き期待値  $\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s], s < t$  は次を満たすものとして定義される;

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s], A\right] = \mathbb{E}[Z_t | A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s, \quad s \leq t. \quad (2.3)$$

- $Z_t$  が  $(\mathcal{F}_t)$  マルチンゲール (martingale) であるとは,  $Z_t$  が, 各  $t \geq 0$  で  $\mathbb{E}[|Z_t|] < \infty$ , かつ

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s, \quad \forall s \leq t \quad (2.4)$$

を満たす確率過程であることを意味する. 上の条件付き期待値の定義式 (2.3) より, (2.4) は

$$\mathbb{E}[Z_t, A] = \mathbb{E}[Z_s, A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s \quad (2.5)$$

に等しい.

- **マルチンゲール**とは, 元々は勝ち負けが半々の賭けでの「倍賭け」という必勝法のこと. まず1万円を賭け, 負けたら2万円, 以下4万円, 8万円, 16万円, ... と続ける. 勝ったときにやめることにすれば, いつも1万円儲かる. (ただしこれは, 無限の賭け金を持っていればの話なので要注意.) 転じて, 各時刻での期待値が有限であり, 過去の遍歴には依らずに一定であるような確率過程をマルチンゲールとよぶ.



- $\tau$  が  $\mathcal{F}_t$ -停止時刻 (stopping time)  $\iff$  各  $t$  に対して,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
- $Z_t$  が局所マルチンゲール (local martingale)  
 $\iff$   $\mathcal{F}_t$ -停止時刻の列  $\tau_1 < \tau_2 < \dots$  ( $\tau_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$ ) が存在して, 各  $j$  に対して  $Z_{t \wedge \tau_j}$  はマルチンゲール. ただし,  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ .
- $\tau$  を  $\mathcal{F}_t$ -停止時刻とする. 任意の有界な  $\mathcal{F}_t$ -可測関数  $f$  に対して

$$\mathbb{E}^x[f(Z_{\tau+t})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^{Z_\tau}[f(Z_t)] \quad \forall t \geq 0 \quad (2.6)$$

が成り立つとき, 確率過程  $Z_t$  は強マルコフ性 (strong Markov property) を持つと言う.

**注 2.2.** 定義より, ( $d$  次元)BM はマルチンゲールであり, 強マルコフ性をもつことが分かる. 一般に, 強マルコフ性をもつ連続確率過程を拡散過程と言う.

- 時間に比例した変動をもつ (つまり速度が定義できる) 確率過程を**有界変動過程**と言う. マルチンゲールと有界変動過程の和で与えられる確率過程を**半マルチンゲール**と呼ぶ.
- 確率過程  $Z_t$  の二次変分 (quadratic variation) を  $\langle Z \rangle_t$  とおく:

$$\langle Z \rangle_t = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (Z(t_{j+1}) - Z(t_j))^2$$

ただしここで,  $\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty}$  は時間区間  $[0, t]$  の分割  $0 \equiv t_0 < t_1 < \dots < t_n \equiv t$  を無限に細かくしていく極限における**確率収束**を意味するものとする.

- 確率変数の列  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  と確率変数  $X$  が同一の確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  で定義されているものとする.  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\{X_n\}$  が  $X$  に**確率収束**するとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

となることを言う. ここではこれを  $\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty}$  と記した.

- $Z_t$  が有界変動過程である場合は  $\langle Z \rangle_t = 0$  である.

- 確率過程  $Z_t, \hat{Z}_t$  に対して

$$\langle Z, \hat{Z} \rangle_t \equiv \frac{1}{4} \left\{ \langle Z + \hat{Z} \rangle_t - \langle Z - \hat{Z} \rangle_t \right\}$$

と定義し, さらに  $dZ_t d\hat{Z}_t = d\langle Z, \hat{Z} \rangle_t$  という記法を用いることにする.

- BM の二次変分は

$$dB_t dB_t = dt$$

であるが, 逆に二次変分が  $dt$  である連続マルチンゲールは BM に限る.

- 一般に連続なマルチンゲールは二次変分により一意的に定まる.
- $B_t^1$  と  $B_t^2$  が互いに独立な BM であるとき  $dB_t^1 dB_t^2 = 0$  となるので,  $d$  次元 BM

$$\mathbf{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$$

に対して

$$dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij} dt$$

が成立する.

- 多次元の場合でも  $dM_t^i dM_t^j, 1 \leq i, j \leq d$  が与えられるとマルチンゲール  $\mathbf{M}_t = (M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^d)$  が一意的に決まることが知られている.

- $\mathbf{Z}_t = (Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^d)$  をマルチンゲール部分が  $\mathbf{M}_t$ , 有界変動部分が  $\mathbf{A}_t = (A_t^1, A_t^2, \dots, A_t^d)$  である  $d$  次元半マルチンゲールとする.  $F$  を  $\mathbb{R}^d$  上で定義された 2 階微分可能な実数値関数としたとき確率過程  $F(\mathbf{Z}_t)$  は,

$$dF(\mathbf{Z}_t) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{Z}_t) (dM_t^j + dA_t^j) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{Z}_t) dM_t^j dM_t^k \quad (2.7)$$

と展開することができる. これを**伊藤の公式**と言う.

右辺の第 2 項は有界変動部分であるが, 以下ではこれを**ドリフト項**とも呼ぶことにする.

## 2.2 $d$ 次元ベッセル過程 ( $BES_d$ ) の定義

$d = 1, 2, 3, \dots$  として,  $d$ 次元ブラウン運動

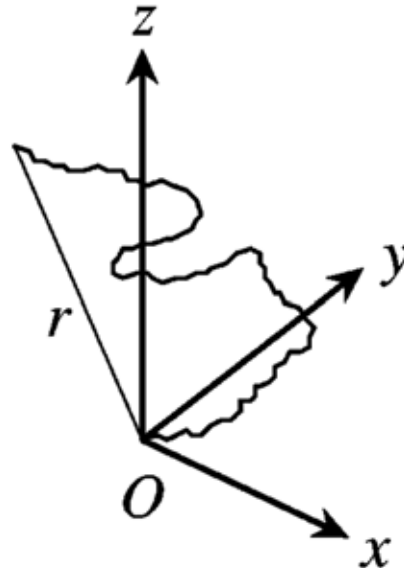
$$\mathbf{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$$

を考える.

これは  $\mathbb{R}^d$  内のベクトル値確率過程と見なせるが, このベクトルの大きさ ( $\mathbf{B}_t$  の動径成分  $|\mathbf{B}_t|$ )

$$X_t = \sqrt{(B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 + \dots + (B_t^d)^2} \quad (2.8)$$

を考えると, これは 1次元拡散過程となる. ただし,  $X_t \in \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  である.



$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$$

とおくと,

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{x_k}{F}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F} - \frac{x_k^2}{F^3}$$

であるが

$$\sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F} \left\{ d - \frac{1}{F^2} \sum_{k=1}^d x_k^2 \right\} = \frac{d-1}{F}$$

なので, 伊藤の公式 (2.7) と,  $B_t^1, \dots, B_t^d$  の独立性

$$dB_t^k dB_t^\ell = \delta_{k\ell} dt, \quad 1 \leq k, \ell \leq d \quad (2.9)$$

より

$$dX_t = \frac{1}{X_t} \sum_{k=1}^d B_t^k dB_t^k + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t}$$

となる.

ここで, マルチンゲール部分の二次変分をとると, 再び (2.9) より

$$\left( \frac{1}{X_t} \sum_{k=1}^d B_t^k dB_t^k \right)^2 = \frac{1}{X_t^2} \sum_{k=1}^d (B_t^k)^2 (dB_t^k)^2 = \frac{1}{X_t^2} \sum_{k=1}^d (B_t^k)^2 dt = dt$$

であるから, これは, 上の  $\{B_t^j\}_{j=1}^d$  とは別の BM,  $B_t$  によって  $dB_t$  と与えられるものとしてよい.

以上より,  $X_t$  が満たす確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE) は

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{1}{X_t} dt \quad (2.10)$$

で与えられることが分かった.

- 以下では

$$d \geq 1$$

として, 一般に (2.10 の SDE に従う 1 次元拡散過程を考えることにする.

- $d = 1$  のときは原点に反射壁を置くものとする:

$$X_t = |B_t|$$

- これを  $d$ -次元ベッセル過程 (Bessel process) とよび, 以下では  $BES_d$  と略記することにする.
- (2.10) の右辺の第 1 項はマルチンゲール部分 (BM), 第 2 項が有界変動部分 (ドリフト項) であるので,  $BES_d$  は半マルチンゲールであることが分かる.

**注 2.3.** ベッセル過程という呼び名は,  $X_t$  の推移 (確率) 密度が, 以下に示すように変形ベッセル関数  $I_\nu$  で表されることによる.

SDE

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{1}{X_t} dt$$

に対応して, コルモゴロフ後進方程式 (Kolmogorov backward equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t; x, y) + \frac{d-1}{2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} p(t; x, y) \quad (2.11)$$

が得られる.



$d \geq 2$ , および  $1 \leq d < 2$  で原点に反射条件を課した場合,  $\text{BES}_d$  の対称な推移密度 ( $p(t; x, y) = p(t; y, x)$  とする) は (2.11) の解

$$p(t; x, y) = \frac{1}{2t} (xy)^{-\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \quad (2.12)$$

で与えられる. ただし,

$$\nu = \frac{d-2}{2} \geq -\frac{1}{2} \quad \iff \quad d = 2(\nu + 1) \geq 1 \quad (2.13)$$

であり,  $I_\nu(z)$  は変形ベッセル関数

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

である. ここで,  $\Gamma(z)$  はガンマ関数:  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du$ ,  $\Re z > 0$ .

スピード測度と呼ばれる測度が

$$m_\nu(dy) = 2y^{2\nu+1} dy \quad (2.14)$$

で与えられ, (2.12) に  $m_\nu(dy)/dy = 2y^{2\nu+1}$  をかけることによって,  $\text{BES}_d$  に対して, 時間  $t \geq 0$  の間に  $x > 0$  から  $y \geq 0$  へ推移する推移確率密度関数が

$$p(t, y|x) = \frac{1}{t} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \quad (2.15)$$

と与えられる.

## 2.3 BES<sub>d</sub>の次元性

以下では、初期値を上付き添字で表し、 $x > 0$  から出発した BES<sub>d</sub> を  $X_t^x$  と書くことにする:

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad t \geq 0, \quad X_0^x = x > 0. \quad (2.16)$$

ベッセル過程のスケーリング性

命題 2.1 任意の  $x > 0$  に対して

$$\frac{1}{x} X_{x^2 t}^x \stackrel{d}{=} X_t^1. \quad (2.17)$$

証明. これは BM のスケーリング性

$$\frac{1}{x} B_{x^2 t} \stackrel{d}{=} B_t$$

が遺伝したものである。  $Y_t = \frac{1}{x} X_{x^2 t}^x$  とおくと、

$$dY_t = \frac{1}{x} \left( dB_{x^2 t} + \frac{d-1}{2} \frac{d(x^2 t)}{X_{x^2 t}^x} \right) = \frac{1}{x} dB_{x^2 t} + \frac{d-1}{2} \frac{x}{X_{x^2 t}^x} dt = d\tilde{B}_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{Y_t}.$$

ここで、 $\tilde{B}_t \equiv B_{x^2 t}/x \stackrel{d}{=} B_t$ . また、初期値は  $Y_0 = X_0^x/x = x/x = 1$ . ■

$x > 0$  から出発した  $\text{BES}_d$  が初めて原点に到達する時刻を  $T_x$  と記す；

$$T_x = \inf \left\{ t > 0 : X_t^x = 0 \right\}. \quad (2.18)$$

SDE (2.16) は  $t < T_x$  までは well-defined である. 次の定理が証明できる.

**定理 2.2** (i)  $d \geq 2 \implies T_x = \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

(ii)  $d > 2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} X_t^x = \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

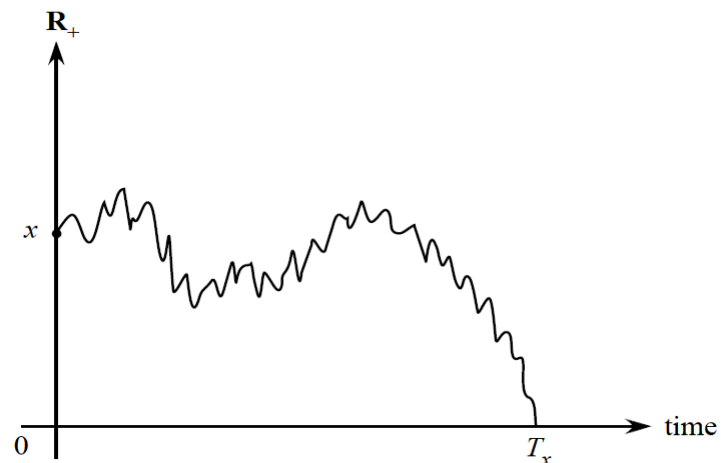
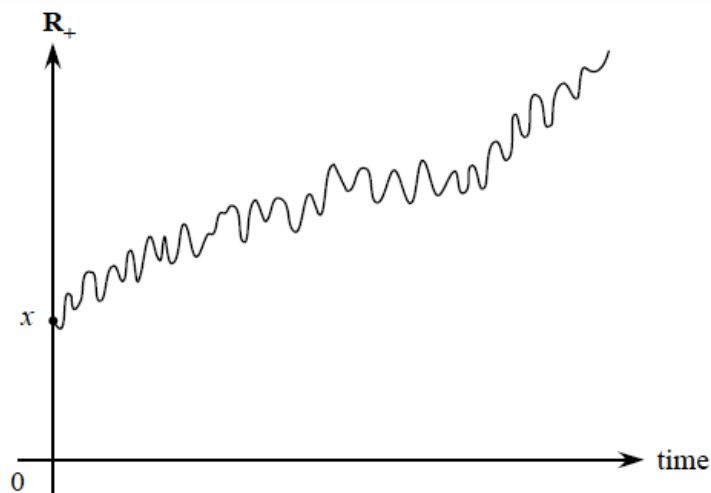
(iii)  $d = 2 \implies \inf_{t > 0} X_t^x = 0, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

つまり,  $x > 0$  から出発した  $\text{BES}_2$  は原点にはぶつからないが, 原点に無限に近づく.

(iv)  $1 \leq d < 2 \implies T_x < \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

$x > 0$  から出発した  $BES_d$  が初めて原点に到達する時刻を  $T_x$  と記す；

$$T_x = \inf \{ t > 0 : X^x(t) = 0 \}.$$



**定理 2.2** (i)  $d \geq 2 \implies T_x = \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

(ii)  $d > 2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} X_t^x = \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

(iii)  $d = 2 \implies \inf_{t > 0} X_t^x = 0, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

つまり、 $x > 0$  から出発した  $BES_2$  は原点にはぶつからないが、原点に無限に近づく.

(iv)  $1 \leq d < 2 \implies T_x < \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

証明 テキストを参照のこと.

以下では、 $1 \leq d < 2$  の場合を考えることにする。  
 $x \in \mathbb{R}_+$  に対して、同一の BM,  $B_t$  を用いて

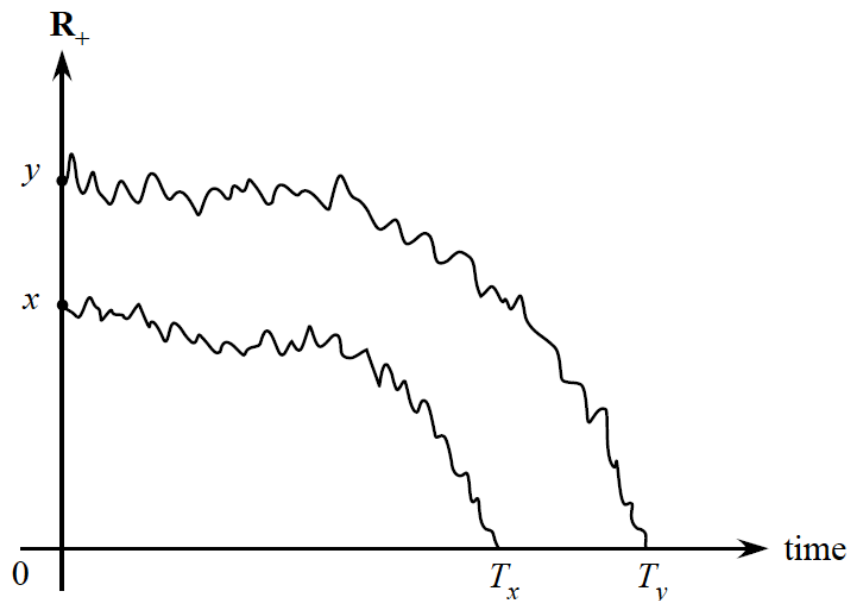
$$X_t^x = x + B_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X_s^x}, \quad t \leq T_x \quad (2.19)$$

で与えられる  $\text{BES}_d$  の族  $\{X_t^x\}_{x>0}$  を考えることにする。  
 この定義より

$$x < y \implies X_t^x < X_t^y, \quad \forall t < T_x \implies T_x \leq T_y$$

であることは明らかである。

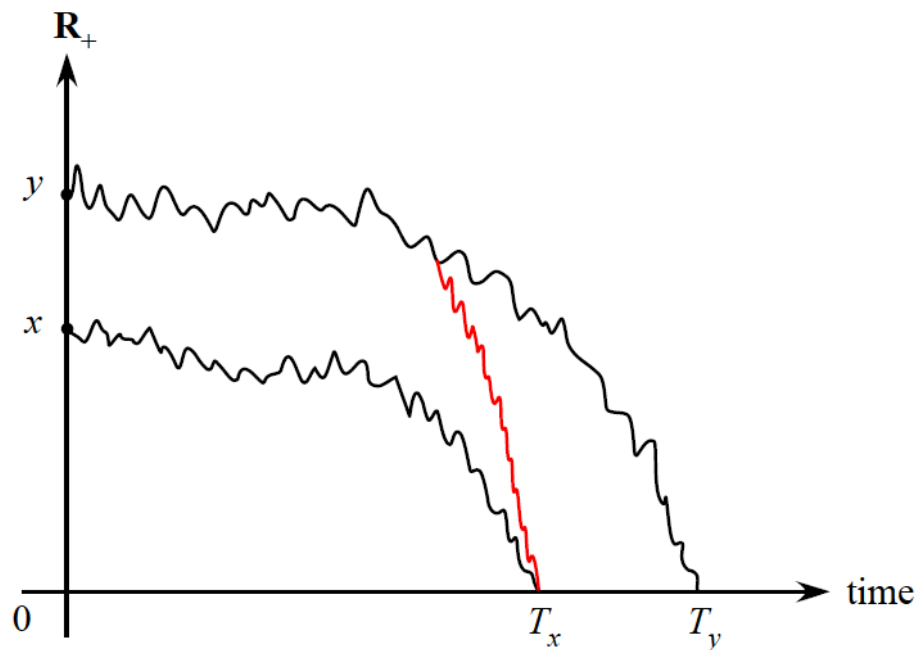
$x < y$  だが、 $T_x = T_y$  となることはあり得るであろうか。



次の定理は、 $x < y$  であっても、 $T_x = T_y$  ということがあり得ることを主張するものである。

定理 2.4 (i)  $\frac{3}{2} < d < 2 \implies x < y$  に対して  $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$ .

(ii)  $1 \leq d \leq \frac{3}{2} \implies x < y$  に対して、 $T_x < T_y$  が確率 1 で成り立つ。



そこで,  $x \leq y$  に対して

$$q(x, y) = \mathbb{P}(T_x = T_y)$$

とおくことにする.

まず, スケーリング性

$$\frac{1}{x} X_{x^2 t}^x \stackrel{d}{=} X_t^1.$$

より, 空間スケールが違っていても, 時間スケールを適当に変えれば分布としては同一視できるので, 比だけが重要であることが分かる. よって

$$q(x, y) = q(1, y/x)$$

である.

また, 任意の  $t > 0$  に対して  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_r < t) = 0$  であるから

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q(1, r) = 0 \tag{2.20}$$

である.

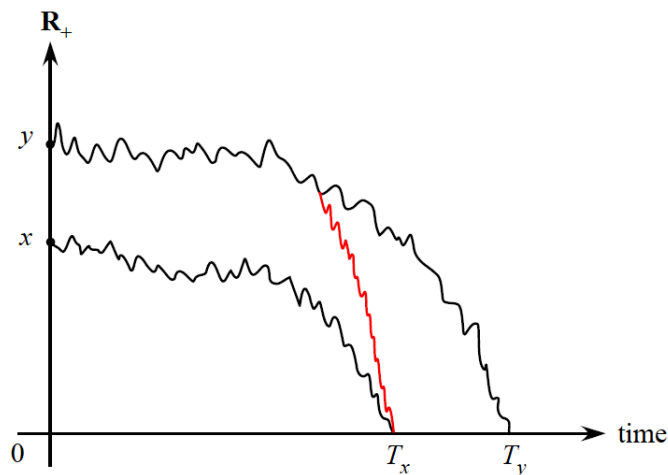
補題 2.3  $0 < x < y$  に対して, 事象  $\{T_x = T_y\}$  と次の事象とは, 確率 0 の部分を除いて等しい;

$$\sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \infty. \quad (2.21)$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{事象 (2.21)} &\iff \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \leq \exists c < \infty, \quad 0 < t < T_x \\ &\iff X_t^y - X_t^x \leq \exists c X_t^x, \quad 0 < t < T_x \\ &\iff X_t^y \leq (1 + \exists c) X_t^x, \quad 0 < t < T_x \end{aligned}$$

なので,  $X_t^x = 0 \implies X_t^y = 0$ , つまり  $(2.21) \implies T_x = T_y$ .





よって、二つの事象の同値性を示すには、 $T_x = T_y$  だが (2.21) が成り立たない状況は、確率 0 であることを言えばよい。

そのために

$$p_r = \mathbb{P} \left( T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \geq r \right)$$

という確率を考える。

$$\tau_r = \inf_{t < T_x} \left\{ \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = r \right\}$$

なる時刻があったとすると、この時刻  $\tau_r$  では  $X_{\tau_r}^y / X_{\tau_r}^x = 1 + r$  となる。そこで、この時刻から再スタートしたプロセスを考えると、 $\text{BES}_d$  の強マルコフ性から

$$p_r \leq q(1, 1 + r)$$

という評価が得られる。(2.20) より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q(1, 1 + r) = 0$$

なので、

$$p_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} p_r = \mathbb{P} \left( T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = \infty \right) = 0.$$

定理 2.4 (i)  $\frac{3}{2} < d < 2 \implies x < y$  に対して  $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$ .

(ii)  $1 \leq d \leq \frac{3}{2} \implies x < y$  に対して,  $T_x < T_y$  が確率 1 で成り立つ.

証明 (途中まで).  $0 < x < y$  に対して, 次の確率過程を考える

$$Z_t = \log \left( \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \right), \quad t < T_x. \quad (2.22)$$

ただし,

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad dX_t^y = \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^y} + dB_t$$

である. ここで, 共通の BM,  $B_t$  を用いていることに注意せよ.

$f(x, y) = \log\{(y-x)/x\}$  とおき,  $f_x(x, y) = \partial f(x, y)/\partial x$  というような偏微分の略記を用いると,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x}, & f_y(x, y) &= \frac{1}{y-x} \\ f_{xx}(x, y) &= -\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2}, & f_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{(y-x)^2}, & f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) &= \frac{1}{(y-x)^2} \end{aligned}$$

であるから, 伊藤の公式 (2.7) より

$$\begin{aligned} dZ_t &= f_x(X_t^x, X_t^y) \left[ dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} \right] + f_y(X_t^x, X_t^y) \left[ dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^y} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ f_{xx}(X_t^x, X_t^y) + 2f_{xy}(X_t^x, X_t^y) + f_{yy}(X_t^x, X_t^y) \right] dt \\ &= -\frac{1}{X_t^x} dB_t + \left[ \left( \frac{3}{2} - d \right) \frac{1}{(X_t^x)^2} + \frac{d-1}{2} \frac{X_t^y - X_t^x}{(X_t^x)^2 X_t^y} \right] dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

が得られる.

ここで、次の関係を満たすように、ランダムな時間変更  $t \rightarrow r$  を行う；

$$\int_0^{r(t)} \frac{ds}{(X_s^x)^2} = t. \quad (2.24)$$

つまり、 $dr(t)/(X_{r(t)}^x)^2 = dt$  である。(2.23) を変更された後の時刻  $r(t)$  で考えると、

$$dZ_{r(t)} = -\frac{1}{X_{r(t)}^x} dB_{r(t)} + \left[ \left( \frac{3}{2} - d \right) + \frac{d-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \right] \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2}$$

となるが、ここで

$$\tilde{B}_t = -\int_0^{r(t)} \frac{dB_s}{X_s^x}$$

とおくと、

$$(d\tilde{B}_t)^2 = \frac{1}{(X_{r(t)}^x)^2} (dB_{r(t)})^2 = \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2} = dt$$

なので、 $\tilde{B}_t$  は BM である。そこで  $\tilde{Z}_t = Z_{r(t)}$  と書くことにすると

$$d\tilde{Z}_t = d\tilde{B}_t + \left[ \left( \frac{3}{2} - d \right) + \frac{d-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \right] dt \quad (2.25)$$

という SDE が得られる。

以下はテキストを参照せよ。 ■

# 付録A.1 マルチンゲールと超幾何方程式

$\frac{3}{2} < d < 2$  のときは,  $x \geq 0$  に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) > 0$$

であることを証明したが, この確率の  $x$  依存性はガウスの超幾何関数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (c)_k \equiv \Gamma(c+k)/\Gamma(c) = c(c+1)\cdots(c+(k-1))$$

(2.26)

を用いて, 正確に表すことができる.

**命題 2.5**  $\frac{3}{2} < d < 2$  のとき,  $x \geq 0$  に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 1 - \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2d-3} F\left(2d-3, d-1, 2(d-1); \frac{x}{1+x}\right).$$

(2.27)

証明. 確率過程

$$R_t = \frac{X_t^{1+x} - X_t^1}{X_t^1}, \quad x > 0 \quad (2.28)$$

を考える.  $g(x, y) = (y - x)/x$  とおくと

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= -\frac{y}{x^2}, & g_y(x, y) &= \frac{1}{x} \\ g_{xx}(x, y) &= \frac{2y}{x^3}, & g_{yy}(x, y) &= 0, & g_{xy}(x, y) &= g_{yx}(x, y) = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

なので, 伊藤の公式 (2.7) より

$$dR_t = -\frac{R_t}{X_t^1} dB_t + \left[ \frac{3-d}{2} \frac{1}{R_t} - \frac{d-1}{2} \frac{1}{R_t(1+R_t)} \right] \left( \frac{R_t}{X_t^1} \right)^2 dt \quad (2.29)$$

が得られる.

ここで、次の時間変更  $t \rightarrow \bar{r}(t)$  を行う；

$$\int_0^{\bar{r}(t)} \left( \frac{R_t}{X_t^1} \right)^2 ds = t. \quad (2.30)$$

また

$$\bar{B}_t = - \int_0^{\bar{r}(t)} \frac{R_s}{X_s^1} dB_s \quad (2.31)$$

とすると、 $\bar{B}_t$  は BM であり、 $\tilde{R}_t = R_{\bar{r}(t)}$  とおくと

$$\begin{aligned} d\tilde{R}_t &= \left[ \frac{3-d}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t} - \frac{d-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t(\tilde{R}_t+1)} \right] dt + d\bar{B}_t \\ &= \left[ \frac{2-d}{\tilde{R}_t} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t+1} \right] dt + d\bar{B}_t \end{aligned} \quad (2.32)$$

が得られる.

$$\psi(x) = \mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = q(1, 1+x) \quad (2.33)$$

として,

$$\overline{M}_t = \psi(\tilde{R}_t) \quad (2.34)$$

とおくと,  $\text{BES}_d$  のスケールリング性

$$\frac{1}{x} X_{x^2 t}^x \stackrel{d}{=} X_t^1.$$

より,  $\overline{M}_t$  はマルチンゲールである:

$$\mathbb{E}[\overline{M}_t | \mathcal{F}_s] = \overline{M}_s, \quad 0 \leq s < t. \quad (2.35)$$

他方, 伊藤の公式 (2.7) と  $\tilde{R}_t$  の SDE (2.32) より

$$d\overline{M}_t = \psi'(\tilde{R}_t) d\tilde{B}_t + \psi'(\tilde{R}_t) \left[ \frac{2-d}{\tilde{R}_t} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t+1} \right] dt + \frac{1}{2} \psi''(\tilde{R}_t) dt. \quad (2.36)$$

ドリフト項 = 0 であるはずなので,  $\psi(x)$  に対して, 次の微分方程式が得られる:

$$\frac{1}{2} \psi''(x) + \left[ \frac{2-d}{x} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{x+1} \right] \psi'(x) = 0. \quad (2.37)$$

ここで  $x = \frac{u}{1-u} \iff u = \frac{x}{1+x}$  という変数変換  $x \rightarrow u$  を行い,  $\tilde{\psi}(u) = \psi(x)$  とおくと, (2.37) 式は

$$u(1-u)\tilde{\psi}''(u) + \{2(2-d) - (3-d)u\}\tilde{\psi}'(u) = 0 \quad (2.38)$$

となる. これは, 超幾何方程式

$$u(1-u)F'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)u\}F' - \alpha\beta F = 0 \quad (2.39)$$

で特に  $\alpha = 0, \beta = 2-d, \gamma = 2(2-d)$  とした場合に他ならない. (2.39) の  $u = 0$  における解の基本系として

$$F(\alpha, \beta, \gamma; u) \quad \text{と} \quad u^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma; u)$$

をとる.  $\alpha = 0$  なので前者は 1 であり, 後者は  $u^{2d-3}F(2d-3, d-1, 2(d-1); u)$  となる. よって,  $c_1, c_2$  を積分定数として

$$\tilde{\psi}(u) = c_1 + c_2 u^{2d-3}F(2d-3, d-1, 2(d-1); u)$$

となる. ここで

$$\tilde{\psi}(0) = \psi(0) = \mathbb{P}(T_1 = T_1) = 1, \quad \tilde{\psi}(1) = \psi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 0$$

なので,

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -F(2d-3, d-1, 2(d-1); 1) = -\frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)}$$

と定まる. ■



## 3 Schramm-Loewner 発展 (SLE )

### 3.1 Riemann の写像定理について

- $\hat{\mathbb{C}}$  をリーマン球  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  とする.
- 領域  $D$  (開集合とする) に対して, その  $\hat{\mathbb{C}}$  における補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$  が  $\hat{\mathbb{C}}$  の連結部分集合をなしているとき,  $D$  は単連結領域 (simply connected domain) であると言う.
- $\mathbb{C}$  上の原点を中心とする単位円を  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  と記す.

**定理 3.1 (Riemann mapping theorem)**  $D$  が  $\mathbb{C}$  全体ではない単連結領域であるとする. この  $D$  内の 1 点  $\omega \in D$  を選ぶ. このとき,  $D$  を単位円  $\mathbb{D}$  に写す共形変換で

$$f(\omega) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(\omega) > 0 \quad (3.1)$$

であるものが存在し, それは一意的に定まる.

証明は

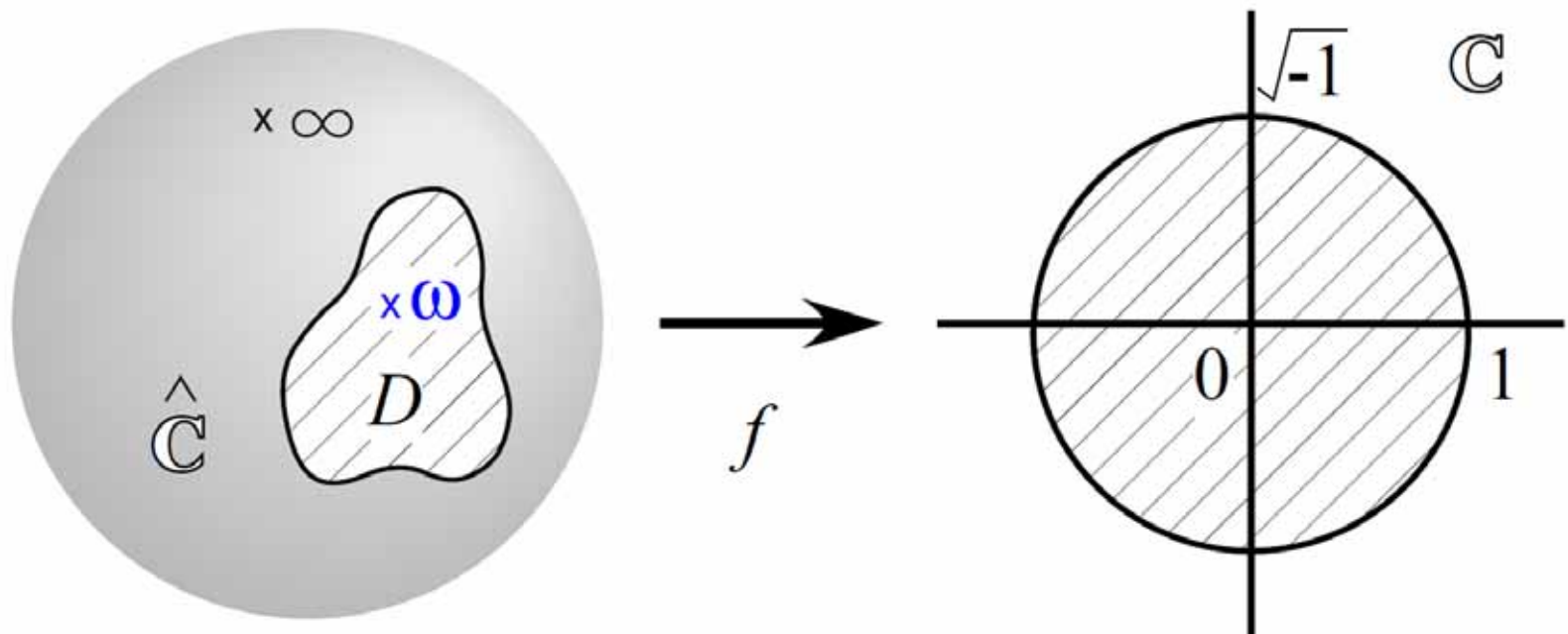
L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., (McGraw-Hill, 1979).

を参照せよ.

**定理 3.1 (Riemann mapping theorem)**  $D$  が  $\mathbb{C}$  全体ではない単連結領域であるとする. この  $D$  内の 1 点  $\omega \in D$  を選ぶ. このとき,  $D$  を単位円  $\mathbb{D}$  に写す共形変換で

$$f(\omega) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(\omega) > 0 \quad (3.1)$$

であるものが存在し, それは一意的に定まる.



- 複素上半平面を  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  と書く.
- 上半平面  $\mathbb{H}$  の有界部分集合  $A$  において,  $A = \mathbb{H} \cap \overline{A}$  であり, かつ  $\mathbb{H} \setminus A$  が単連結であるとき,  $A$  を **compact  $\mathbb{H}$ -hull** と言う. compact  $\mathbb{H}$ -hull 全体の集合を  $\mathcal{Q}$  と書くことにする.  $A \in \mathcal{Q}$  自体は連結である必要はない.

$A \in \mathcal{Q}$  が与えられているものとする.  $\mathbb{H} \setminus A$  は  $\mathbb{C}$  全体ではない単連結領域なので, リーマンの写像定理 (定理 3.1) より

$$f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{D}$$

という共形変換が存在することが保証されている.

また, **Möbius 変換**

$$f^{(2)}(z) = \frac{\bar{\alpha}z - \alpha\beta}{z - \beta}, \quad |\beta| = 1, \alpha \in \mathbb{H} \quad (3.2)$$

は

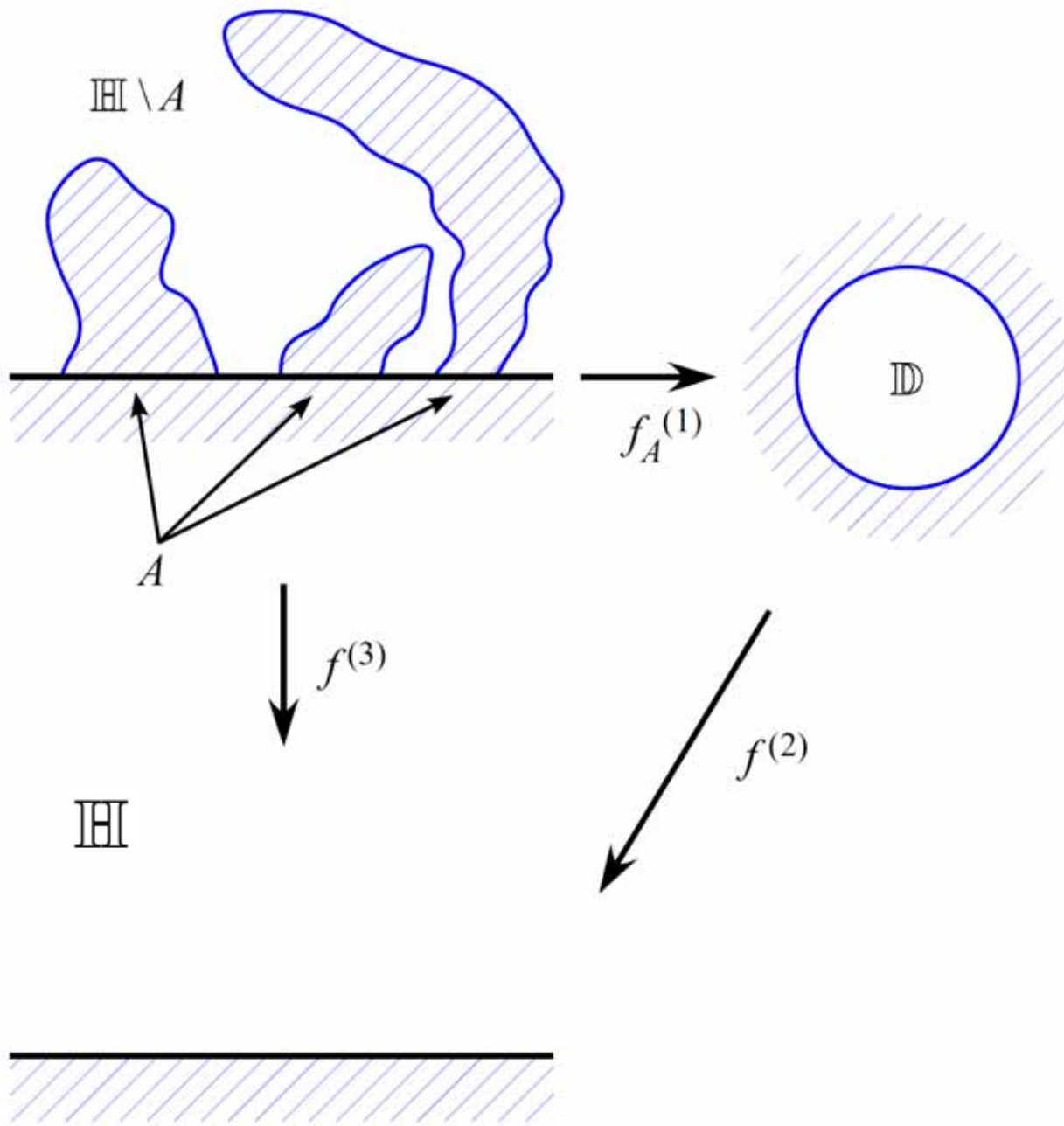
$$f^{(2)} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$$

の共形変換である ( $f^{(2)}(0) = \alpha$  である).

この 2 つを合成した  $f_A^{(3)} = f^{(2)} \circ f^{(1)}$  は

$$f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$$

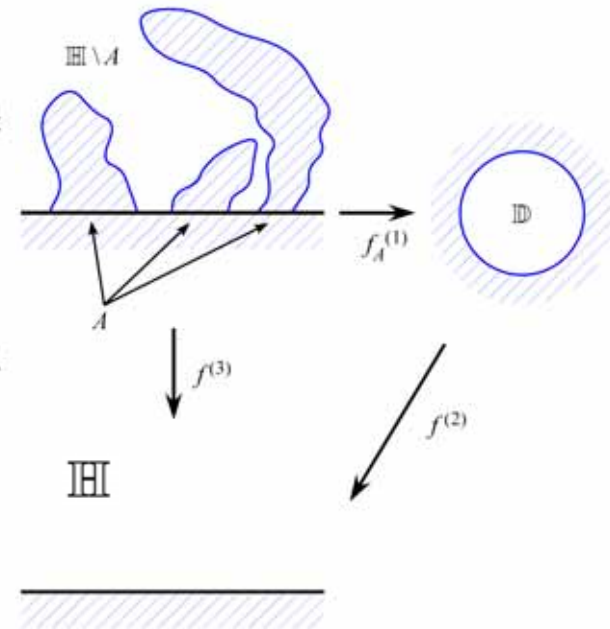
なる共形変換である.



- $\mathbb{H} \setminus A$  の境界は、 $A$  の境界と実軸から成る.
- $f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{D}$  によって、この境界は単位円周上  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  に写されることになる.
- また、 $f^{(2)} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  によって、単位円周は  $\mathbb{H}$  の境界、すなわち実軸 (および無限遠点  $\infty$ ) に写ることになる.
- このことから、 $f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$  によって、実軸上の点は実軸上の点に写されることになる. (また  $A$  の境界も実軸上に写される.)
- また、無限遠点  $\infty$  は、(3.2) で与えられる  $f_A^{(1)}$  により単位円周上のいずれかの点に写されるが、 $f^{(2)}$  では特に  $z = \beta$  という単位円周上の点が  $\infty$  に写される.
- よって  $f^{(2)}$  の径数  $\beta$  を調節することにより、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [f_A^{(3)}(z) - z] = 0$$

となるように  $f_A^{(3)}$  を選ぶことができる. これを流体力学的条件 (hydrodynamic condition) と呼ぶ.



以上では  $f_A^{(3)}$  は  $\mathbb{H} \setminus A$  上で定義された関数であるが、これは実軸上  $z \in \mathbb{R}$  では実関数であるので、シュバルツの鏡像原理によって下半平面に解析接続することができる。 $1/f_A^{(3)}(1/z)$  を考えると、これは原点  $0$  を原点  $0$  に写す解析関数であるから、原点  $0$  の周りで次のようにテイラー展開できる。

$$\frac{1}{f_A^{(3)}(1/z)} = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

これより

$$f_A^{(3)}(z) = b_1 z + b_0 + b_{-1} \frac{1}{z} + b_{-2} \frac{1}{z^2} + \cdots, \quad b_j \in \mathbb{R}$$

という展開が得られる。ここで、 $z \in \mathbb{R}$  のときに  $f_A^{(3)}(z)$  も実数であることから、係数  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  である。

次に、 $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  の Möbius 変換で  $\infty$  を  $\infty$  に写すものを考えることにする。これは

$$f^{(4)}(z) = d_1 z + d_0, \quad d_1 > 0, d_0 \in \mathbb{R}$$

で与えられる。

これと  $f_A^{(3)}$  との合成を考えると

$$\begin{aligned} [f^{(4)} \circ f_A^{(3)}](z) &= f^{(4)}(f_A^{(3)}(z)) \\ &= d_1 b_1 z + (d_1 b_0 + d_0) + d_1 b_{-1} z^{-1} + d_1 b_{-2} z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

となる。

特に

$$d_1 b_1 = 1, d_1 b_0 + d_0 = 0 \iff d_1 = \frac{1}{b_1}, d_0 = -\frac{b_0}{b_1}$$

と係数  $d_0, d_1$  を選ぶことにする。こうして定められた共形変換を

$$g_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H} \tag{3.3}$$

と書くことにすると、これは流体力学的条件  $\lim_{z \rightarrow \infty} [g_A(z) - z] = 0$  を満たし、

$$g_A(z) = z + c_{-1} \frac{1}{z} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + \cdots, \quad c_j \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

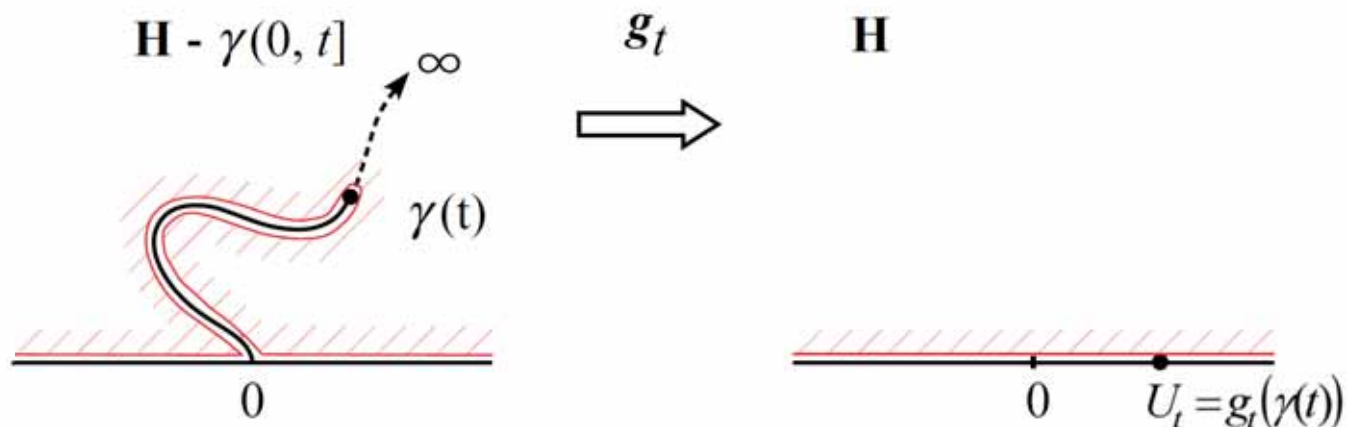
と展開されることになる。

## 3.2 複素上半平面内の曲線と共形変換

実軸上の一点  $\gamma(0) \in \mathbb{R}$  を出発点として、時間  $t \in [0, \infty)$  とともに単調に伸びていく曲線

$$\gamma = \gamma[0, t], \quad t \in [0, \infty)$$

を考える。まずは単純曲線を考えることにし、また  $\gamma(0, \infty) \in \mathbb{H}$  とする。



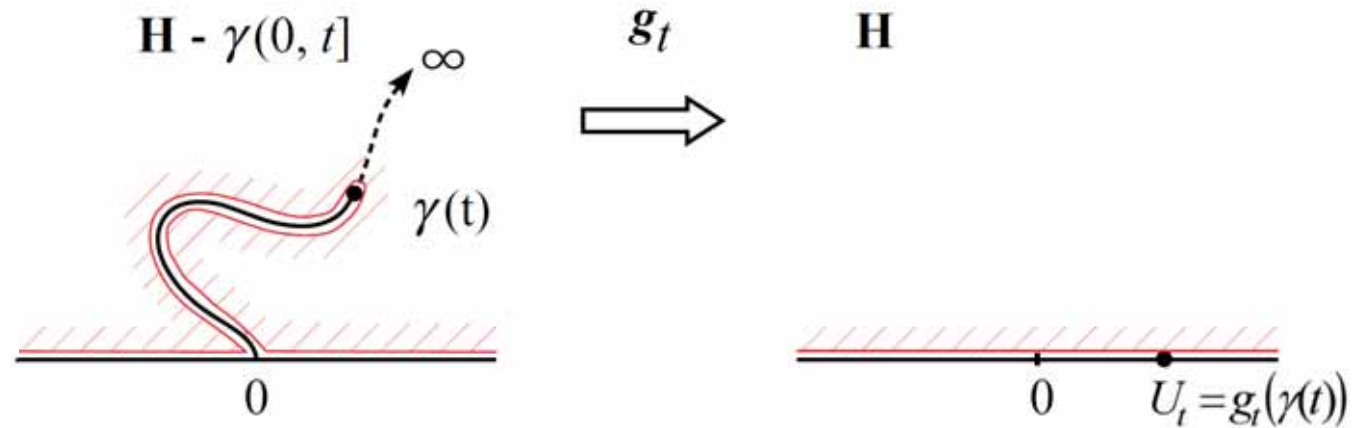
上の節で述べたように、リーマンの写像定理と Möbius 変換に関する知識より、各時刻  $t > 0$  において、

$$z + \frac{a_2(t)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad a_2(t) \in \mathbb{R}, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

という漸近形をもつ

$$\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$$

なる共形変換が唯一存在することを示すことができる。



この共形変換を

$$g_{\gamma(0,t]}(z) \quad \text{または} \quad g_t(z)$$

と書くことにする.  $g_0(z) = z$  とする.

**注 3.1.** この変換  $g_t$  によって, 領域  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  の境界のうち,  $\gamma(0, t] \cup \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}$  に, 無限遠点  $\infty$  は無限遠点  $\infty$  に写される.



以下、この 3.2 節では  $t \in (0, \infty)$  を固定して考えることにする。

- $B_s^j, j = 1, 2$  を 2 つの独立な BM として、 $\mathbb{C}$  上の複素 BM を

$$B_s = B_s^1 + \sqrt{-1}B_s^2, \quad s \in [0, \infty) \quad (3.6)$$

で定義する。

- いま、 $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  の内点  $z$  からスタートした複素 BM を考え、これがこの領域の境界である  $\gamma(0, t] \cup \mathbb{R}$  のいずれかの点に初めて到達する時刻を

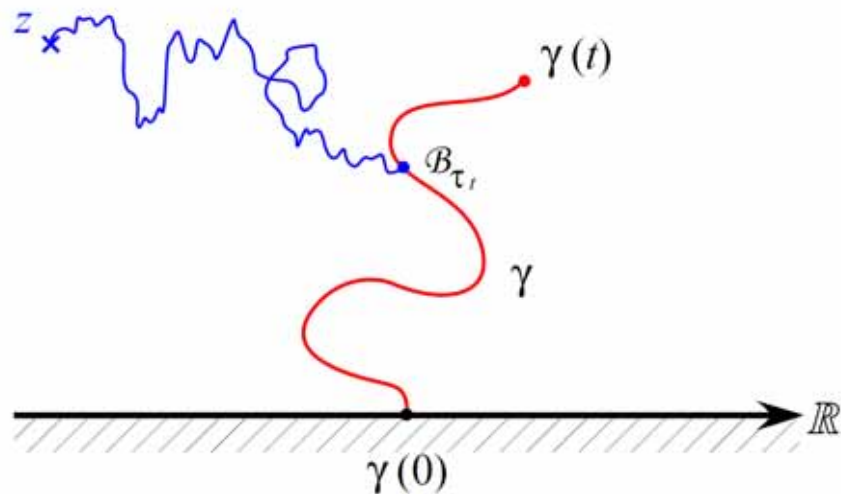
$$\tau_t = \inf \left\{ s \geq 0 : B_s \in \gamma(0, t] \cup \mathbb{R} \right\} \quad (3.7)$$

と書くことにする。

- $z - g_t(z)$  は  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  で有界な正則関数であり、その実部と虚部はそれぞれ調和関数である。ここでは虚部

$$\phi_t(z) = \Im(z - g_t(z)), \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$$

を考えることにする。



これは

$$\phi_t(z) = \mathbb{E}^z[\phi_t(\mathcal{B}_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t)$$

と与えることができる.

定義  $\phi_t(z) = \Im(z - g_t(z))$  より

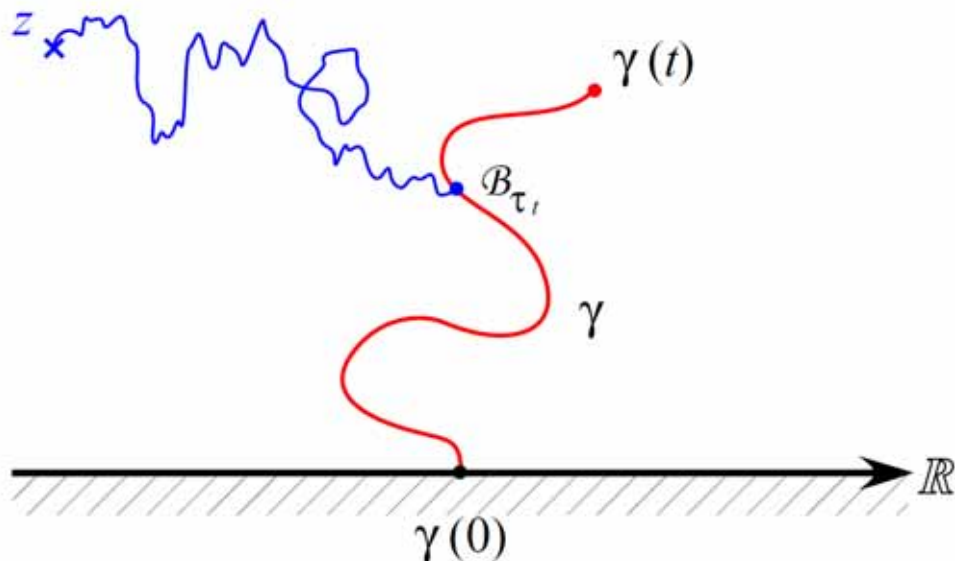
$$\phi_t(z) = \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})] - \mathbb{E}^z[\Im(g_t(\mathcal{B}_{\tau_t}))] = \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})]$$

となる. ここで,  $\mathcal{B}_{\tau_t} \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t)$  であるので注 3.1 より  $g_t(\mathcal{B}_{\tau_t}) \in \mathbb{R}$  であることを用いた.

したがって

$$\Im(g_t(z)) = \Im(z) - \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t) \quad (3.8)$$

という表式が得られる.



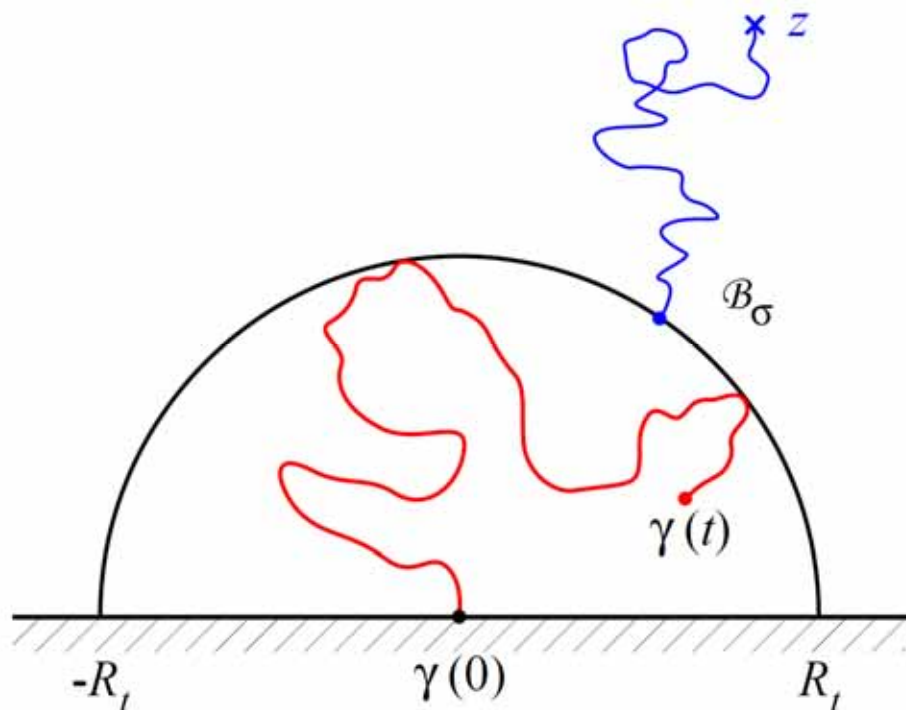
- $R_t$  を

$$R_t = \sup \left\{ |\gamma(s) - \gamma(0)| : s \in (0, t] \right\} \quad (3.9)$$

と定義する.

$\gamma(0, t]$  は  $\gamma(0)$  を中心とする半径  $R_t$  の半円  $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$  の中に含まれることになる.

- この半円の外の  $\mathbb{H}$  の点  $z \in \mathbb{H} \setminus B(\gamma(0), R_t)$  に対して, この点からスタートした複素 BM を考えることにする. この複素 BM が  $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$  の半円周上, または実軸に初めて到達する時刻を  $\sigma$  と書くことにする;



- このとき、到達点  $B_\sigma$  の半円上の分布密度を  $p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}), \theta \in (0, \pi)$  と書くことにすると、複素 BM の強マルコフ性より

$$\mathbb{E}^z[\Im(B_\tau)] = \int_0^\pi p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}) \mathbb{E}^{\gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}}[\Im(B_\tau)] R_t d\theta \quad (3.10)$$

が成り立つ.

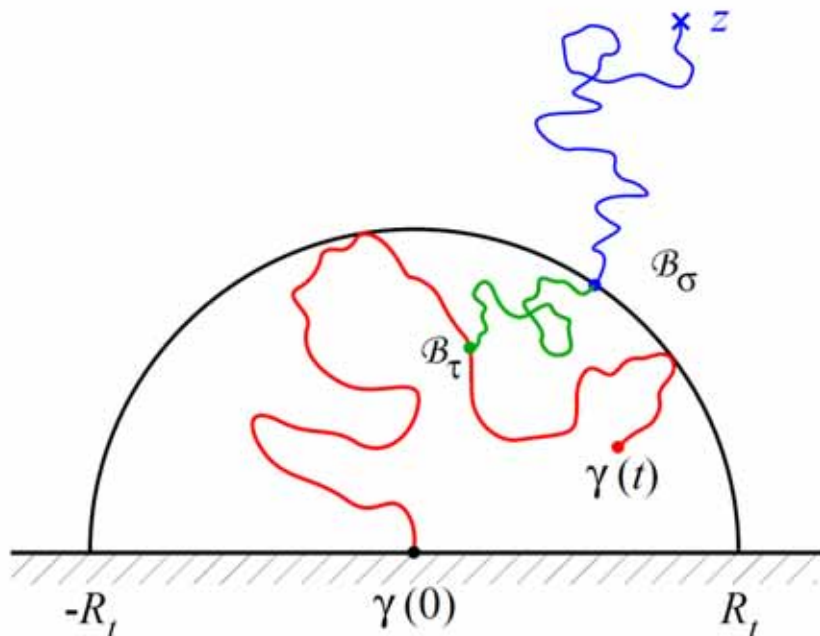
- この半円上の密度は、上半平面から半円  $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$  を除いた領域

$$D = \{z \in \mathbb{H} : |z - \gamma(0)| > R_t\}$$

におけるポアソン核であり,

$$p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) R_t^{n-1} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{(z - \gamma(0))^n} \right], \quad z \in D, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (3.11)$$

で与えられる (テキスト付録 A.2 を参照).



曲線  $\gamma[0, t]$  は、その出発点  $\gamma(0)$  を中心とする半径  $R_t$  の円に含まれる。  
したがって、この曲線を実軸に沿って  $-\gamma(0)$  だけ平行移動して原点からスタートするようにした後、  
全体を  $1/R_t$  に拡大または縮小して得られる曲線を  $\tilde{\gamma}[0, t]$  と書くことにすると、  
これは原点を中心とする単位円に含まれることになる。

$$\tilde{\tau}_t = \inf \left\{ s \geq 0 : \mathcal{B}_s \in \tilde{\gamma}(0, t] \cup \mathbb{R} \right\} \quad (3.12)$$

とすると、複素 BM のスケール性よりこの分布は  $\tau_t/R_t^2$  の分布に等しく、

$$\mathbb{E}^{\gamma(0)+R_t e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})] = R_t \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})], \quad \theta \in (0, \pi)$$

である。

これらの結果を (3.8) に代入すると

$$\Im(g_t(z)) = \Im \left( z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n} \right)$$

となる。ただし

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin((n-1)\theta) \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.13)$$

である。

$g_t$  は (3.5) という漸近形をもつ共形変換（正則関数）であるので、これより

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \quad (3.14)$$

と定まることになる。

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$$

$0 \leq \theta \leq \pi$  のとき,  $n = 2, 3, \dots$  に対して  $|\sin(n\theta)| \leq c_n \sin \theta$  となる有限な値  $c_n$  をとることができる. よって

$$\begin{aligned} |a_n(t)| &\leq R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin((n-1)\theta)| \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^{n-2} a_2(t), \quad n = 3, 4, 5, \dots \end{aligned} \tag{3.15}$$

という評価が得られる.

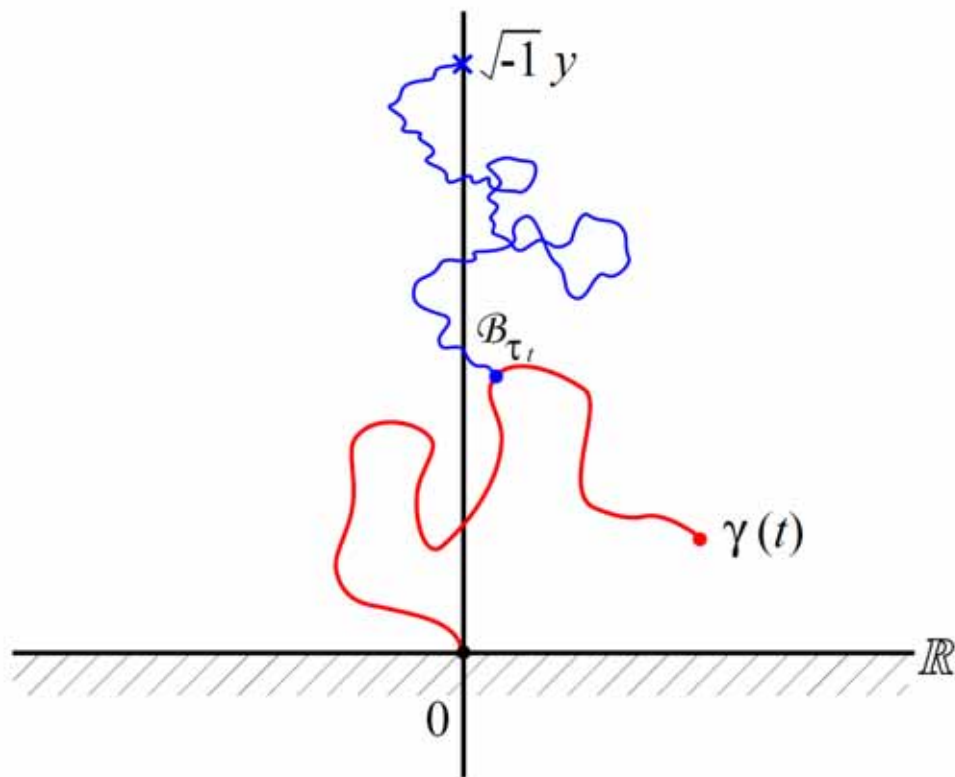
注 3.2. (3.13) で特に  $n = 2$  とすると

$$a_2(t) = R_t^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \mathbb{E} e^{\sqrt{-1}\theta} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \quad (3.16)$$

という表式が得られることになるが、上で与えた議論を逆にたどると

$$a_2(t) = \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbb{E}^{\sqrt{-1}y} [\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})] \quad (3.17)$$

であることが分かる。この量は曲線  $\gamma(0, t]$  の半平面 **capacity** ( $\text{hcap}(\gamma(0, t])$  と書く) と呼ばれている。



補題 A.4  $r > 0, x \in \mathbb{R}$  とすると,  $A \in \mathcal{Q}$  に対して次が成り立つ.

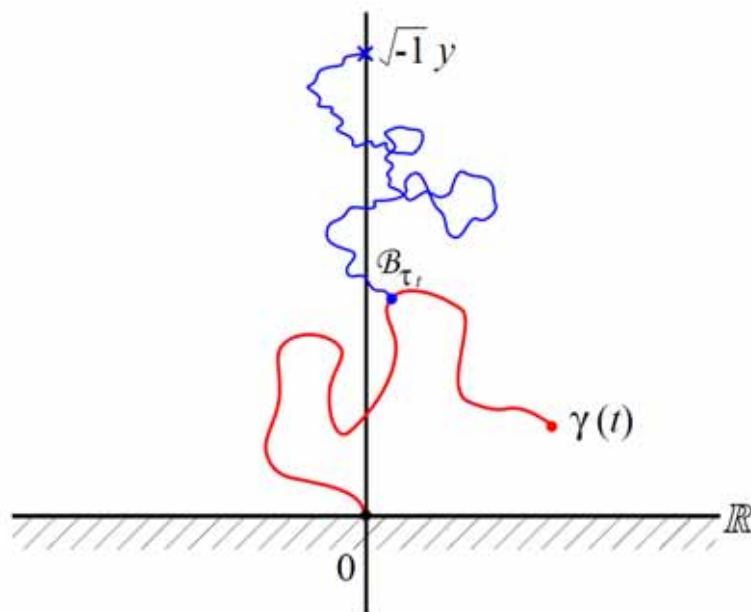
$$\text{hcap}(rA) = r^2 \text{hcap}(A), \quad (\text{A.39})$$

$$\text{hcap}(A + x) = \text{hcap}(A). \quad (\text{A.40})$$

補題 A.5  $A, B \in \mathcal{Q}, A \subset B$  とする. このとき

$$\text{hcap}(B) = \text{hcap}(A) + \text{hcap}(g_A(B \setminus A)) \quad (\text{A.44})$$

が成り立つ.





**注 3.3.**  $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  におけるポアソン核を  $p_{H_t}(z, w)$ ,  $z \in H_t$ ,  $w \in \partial H_t = \tilde{\gamma}(0, t] \cap \mathbb{R}$  と書くと,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}}[\mathfrak{S}(\mathcal{B}_{\tilde{\gamma}_t})] &= \int_{\partial H_t} p_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) \mathfrak{S}(w) dw \\ &= \int_{\tilde{\gamma}(0, t]} p_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) \frac{\mathfrak{S}(w)}{\mathfrak{S}(e^{\sqrt{-1}\theta})} dw \times \mathfrak{S}(e^{\sqrt{-1}\theta}) \\ &= \sin \theta \int_{\tilde{\gamma}(0, t]} \hat{p}_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) dw \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\hat{p}_D(z, w) \equiv p_D(z, w) \frac{\mathfrak{S}(w)}{\mathfrak{S}(z)}, \quad z \in D, \quad w \in \partial D \quad (3.18)$$

としたが, これは次式で定義される  $\mathbb{H}$ -excursion  $\hat{\mathcal{B}}_s$  のポアソン核になっている:

$$\hat{\mathcal{B}}_s = B_s + \sqrt{-1}X_s, \quad s \in [0, \infty). \quad (3.19)$$

ここで  $B_s$  は BM であり,  $X_s$  はこれと独立な  $\text{BES}_3$  (3次元ベッセル過程) である. したがって上の量は  $\sin \theta \mathbb{P}^{e^{\sqrt{-1}\theta}}(\hat{\mathcal{B}}[0, \infty) \cap \tilde{\gamma}(0, t] \neq \emptyset)$  となるので, 係数  $a_n(t)$  に対しては

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin((n-1)\theta) \sin \theta \mathbb{P}^{e^{\sqrt{-1}\theta}}(\hat{\mathcal{B}}[0, \infty) \cap \tilde{\gamma}(0, t] \neq \emptyset) d\theta \quad (3.20)$$

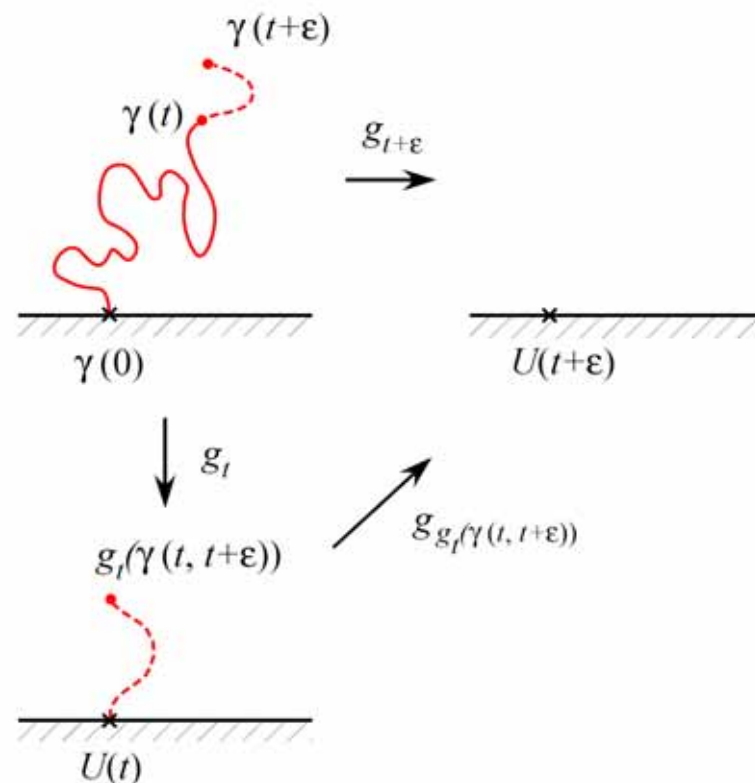
という  $\mathbb{H}$ -excursion と曲線  $\tilde{\gamma}(0, t]$  との交差確率を用いた表式も得られる.

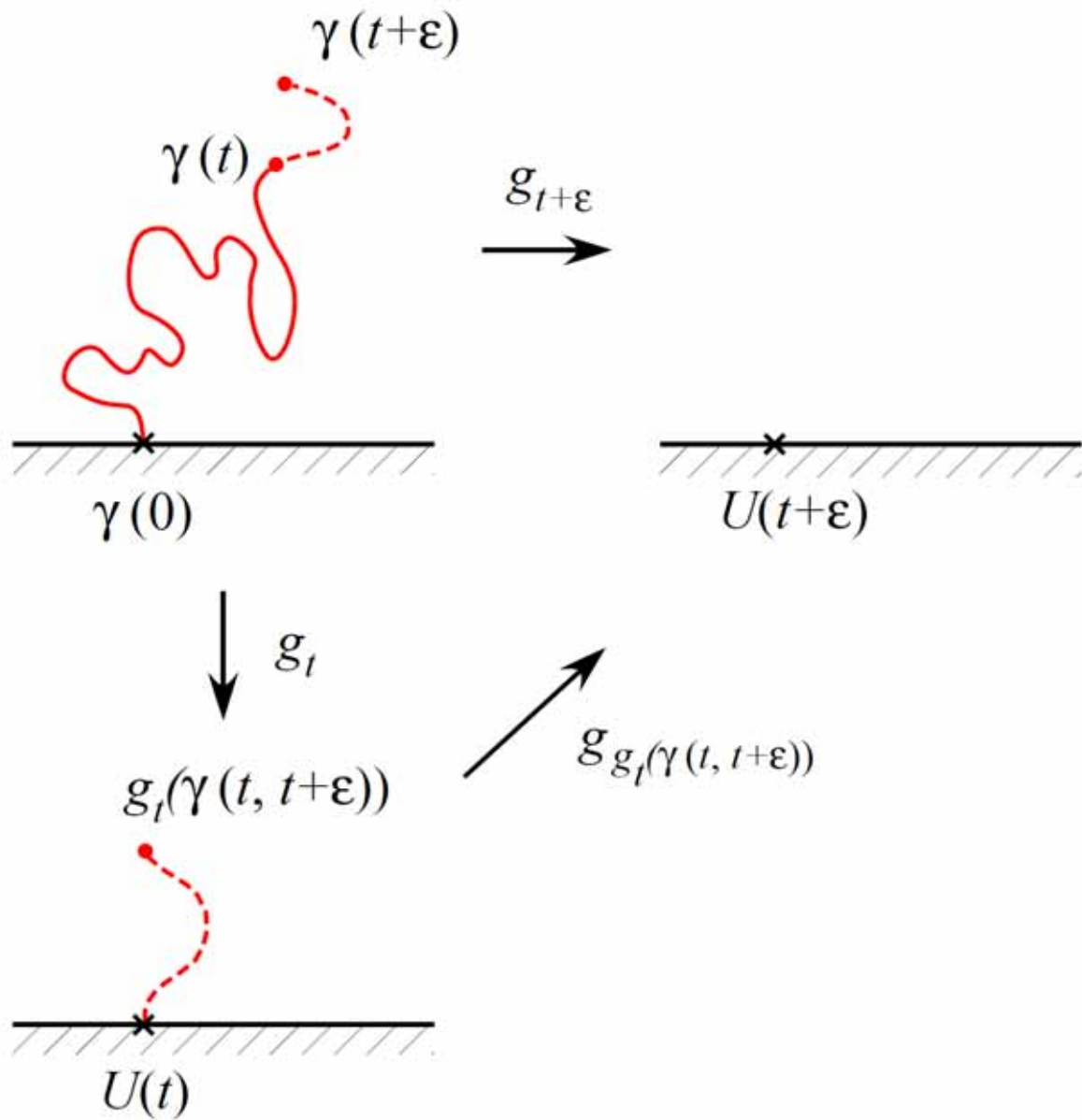
### 3.3 Loewner の微分方程式

この 3.3 節では、時間を連続的に変化させて  $\mathbb{H}$  内の曲線  $\gamma$  とそれに伴う共形変換  $g_t(x)$  の時間発展を追うことにする。

$\varepsilon > 0$  として、時刻  $t+\varepsilon$  までの曲線  $\gamma(0, t+\varepsilon]$  を考える。これに対応する共形変換  $g_{t+\varepsilon}(z)$  は次のような合成で与えられる。

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{\gamma(0, t+\varepsilon]}(z) \\ &= \left[ g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])} \circ g_t \right](z) = g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])}(g_t(z)). \end{aligned} \quad (3.21)$$





- この共形変換  $g_{t+\varepsilon}(z)$  によって,  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t + \varepsilon]$  は  $\mathbb{H}$  に写される.
- しかし,  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t + \varepsilon]$  を  $g_{t+\varepsilon}(z)$  ではなく  $g_t(z)$  で写すと, 像は  $\mathbb{H}$  ではなく  $\mathbb{H} \setminus g_t(\gamma(t, t + \varepsilon])$  となる. これは  $\mathbb{H}$  から曲線  $g_t(\gamma(t, t + \varepsilon])$  を除いた領域である.
- この曲線の出発点にあたる実軸上の点を  $U_t$  と書くことにする. すなわち

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \quad (3.22)$$

とする. (当然  $U_0 = \gamma(0)$  である.)

- すると, 前節の結果 (3.14) より

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])}(g_t(z)) \\ &= g_t(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}((t, t + \varepsilon])}{(g_t(z) - U_t)^n} \end{aligned} \quad (3.23)$$

という形に書けることになる. ただしここで

$$R_t^\varepsilon = \sup \left\{ |g_t(\gamma(s)) - U_t| : s \in [t, t + \varepsilon] \right\}, \quad (3.24)$$

として,

$$|a_n((t, t + \varepsilon])| \leq c_{n-1} (R_t^\varepsilon)^{n-2} a_2((t, t + \varepsilon]), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (3.25)$$

である.

- 半平面 capacity の加法性より

$$a_2((t, t + \varepsilon]) = a_2(t + \varepsilon) - a_2(t). \quad (3.26)$$

が導かれる.

以上より

$$\left| g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z) - \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{g_t(z) - U_t} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} (a_2(t+\varepsilon) - a_2(t))$$

という不等式が得られることになる. この両辺を  $\varepsilon$  で割ると

$$\left| \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} - \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} \times \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon}$$

となるが, ここで  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとることにする.

半平面 capacity  $a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$  は一般に  $t$  について狭義単調増加関数であり連続であるが, さらに微分可能であり

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon} = \frac{da_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \text{hcap}(\gamma(0, t]) \quad (3.27)$$

が存在するものと仮定する.

また定義より  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_t^\varepsilon = 0$  であるから, 上の評価より

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} = \frac{\partial g_t(z)}{\partial t}$$

が存在し, これは次の微分方程式を満たすことが結論される.

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{da_2(t)}{dt}, \quad a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t]). \quad (3.28)$$

ただし, 初期条件は  $g_0(z) = z$  である.

これをレヴナーの微分方程式 (Loewner differential equation) と言う.

**注 3.4.** 上の (3.27) のところで,  $a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$  が微分可能であることを仮定した. 一般に  $a_2(t)$  は  $t$  について狭義単調増加関数であり, 連続であることが示せる. したがって, 曲線  $\gamma$  を (時刻  $t$  の代わりに) 半平面 capacity そのもので径数付けすることが可能である. 特に通常は

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(a_2^{-1}(2t))$$

とおくことにする. この定義より

$$a_2(t) = \text{hcap}(\bar{\gamma}((0, t])) = 2t \quad (3.29)$$

となるので, レヴナー方程式は

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \quad (3.30)$$

となる. (以下では, (3.29) である  $\bar{\gamma}$  を改めて  $\gamma$  と記すことにする. ) この方程式から生成される  $g_t$  を特に **Loewner chains** と呼ぶ. また  $U_t$  をレヴナー方程式の駆動関数と呼ぶことにする.

レヴナー方程式に展開式 (3.14) を代入すると、展開係数  $a_n(t)$  に対して階層的な方程式系が得られる:

$$\frac{d}{dt}a_n(t) = 2\mathcal{P}_n(a_1(t), a_2(t), \dots), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.31)$$

ただし

$$a_1(t) = -U_t \quad (3.32)$$

とした。また  $\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \dots)$  は次式で与えられる多項式である (ただし  $\mathcal{P}_2 = 1$  とする):

$$\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\mathbf{m}:|\mathbf{m}|=n-2} (-1)^{\ell(\mathbf{m})} \prod_{j=1}^{\ell(\mathbf{m})} x_{m_j}. \quad (3.33)$$

ここで右辺は  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots)$ ,  $m_j \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$  に対する和であり,  $\ell(\mathbf{m}) \equiv \mathbf{m}$  の成分の数,  $|\mathbf{m}| \equiv \sum_{j=1}^{\ell(\mathbf{m})} m_j$  である。これは、次の漸化式によっても与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= 0, & \mathcal{P}_2 &= 1, \\ \mathcal{P}_n &= -\sum_{j=1}^{n-2} x_j \mathcal{P}_{n-j}, & n &\geq 2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

具体的には

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_2(t) &= 2, \\ \frac{d}{dt}a_3(t) &= -2a_1(t), \\ \frac{d}{dt}a_4(t) &= 2\{(a_1(t))^2 - a_2(t)\}, \\ \frac{d}{dt}a_5(t) &= 2\{- (a_1(t))^3 + 2a_2(t)a_1(t) - a_3(t)\}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

である。  $g_0(z) = z$  なので  $a_n(0) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  である。駆動関数  $a_1(t) = -U_t$  が与えられると、上の方程式系によりすべての展開係数  $a_n(t)$ ,  $n = 2, 3, \dots$  が決まり、共形変換  $g_t(z)$  が定まることになる。つまり、レヴナー方程式は無限個の階層的な微分方程式系と等価であることになる。

## 3.4 SLE と BES<sub>d</sub>

Schramm は, レヴナー方程式の駆動関数として

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad \kappa > 0, \quad B_0 = 0 \quad (3.36)$$

とした. ここで  $B_t$  は 1 次元標準 BM である

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z. \quad (3.37)$$

BM のスケールリング性より

$$U_t \stackrel{d}{=} B_{\kappa t}$$

である. つまり, 径数  $\kappa$  は BM の一様な時間変更を表す.

この初期値問題の解として得られる (時刻  $t \geq 0$  で径数付けされる) 共形変換の族  $\{g_t\}_{t \geq 0}$  を提案者 **Schramm** の名前を冠して (**chordal**) シュラム・レヴナー発展 (**Schramm-Loewner evolution**) と呼ぶ. 以下ではこれを, 径数  $\kappa$  も付して,  $SLE_\kappa$  と略記する.



3.2 節と 3.3 節では、時間  $t \in [0, \infty)$  とともに単調に伸びていく単純曲線  $\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, \infty)\}$  を与え、各時刻  $t \in [0, \infty)$  で  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$  となる共形変換  $g_t(z)$  を求める問題を考えた。  $g_t(z)$  はレヴナー方程式 (3.30) の解として与えられることが分かった。この方程式は

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \quad (3.38)$$

で駆動される形をしていた。

これに対して、ここでは  $U_t$  を確率過程 (3.36) として与え、確率的なレヴナー方程式 (3.37) を解くことにより、ランダムに時間発展する共形変換  $g_t(z)$  を求める問題を考えるのである。この場合にも、(3.38) によって  $\gamma(t), 0 \leq t < \infty$  が定められることになる。

Loewner : 曲線  $\gamma(0, t]$   $\implies$  共形変換  $g_t$   $\implies U_t = g(\gamma(t))$

Schramm : **逆問題**  $U_t$   $\implies$  共形変換  $g_t$   $\implies$  曲線  $\gamma(0, t]$

ランダムネス  $U_t$  : 確率過程  $\implies$  共形変換  $g_t$  の統計集団

$\implies$  曲線  $\gamma$  の統計集団  $\iff$  測度  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$



**Oded Schramm** (December 10, 1961 in Jerusalem, Israel  
– September 1, 2008, Washington State, USA)

次が知られている。

**定理 3.2**  $SLE_\kappa$  で定められる  $\gamma$  は、確率 1 で曲線である。

**注 3.5.** 上の主張は、「確率 1 で、 $SLE_\kappa$  は曲線によって生成される」という言い方でも表現される。また  $\gamma$  は、 $SLE_\kappa$  の道 ( $SLE_\kappa$  path), または  $SLE_\kappa$  曲線 ( $SLE_\kappa$  curve) と呼ばれる。これは、ある確率法則に従うランダムな曲線である。定理 3.2 の証明は実は難しいのでここでは述べない。文献

G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*,  
(American Mathematical Society, 2005).

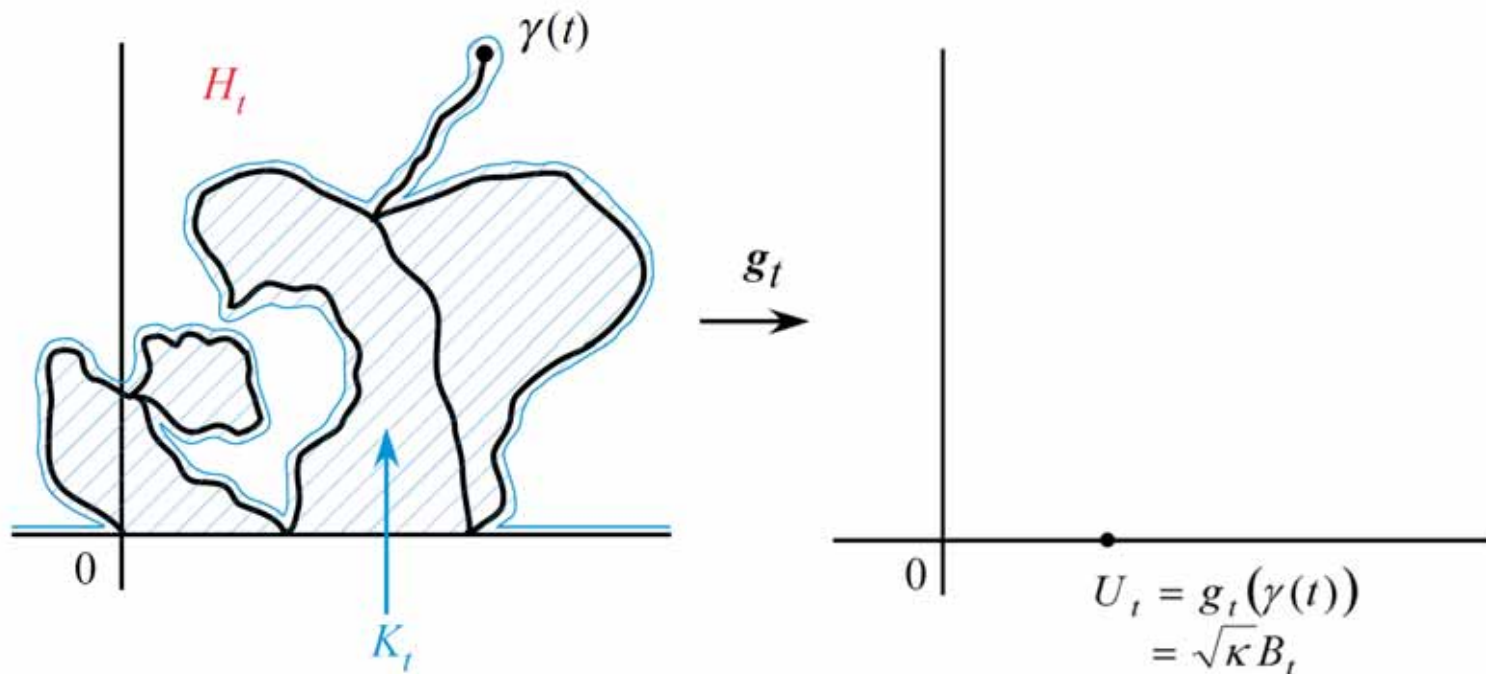
を参照せよ。

$SLE_\kappa$   $\gamma$  は一般には単純曲線ではない。以下,

$$\begin{aligned} H_t &= \mathbb{H} \setminus \gamma[0, t] \text{ の非有界な連結領域} \\ K_t &= \mathbb{H} \setminus H_t \end{aligned} \tag{3.39}$$

とする。

- $K_t$  は  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma[0, t]$  の hull と呼ばれる。
- $g_t(z)$  は  $H_t \rightarrow \mathbb{H}$  の共形変換である。つまり  $H_t$  は写像  $g_t$  の定義域である。他方,  $K_t$  に対しては,  $g_t$  は定義されないことになる。



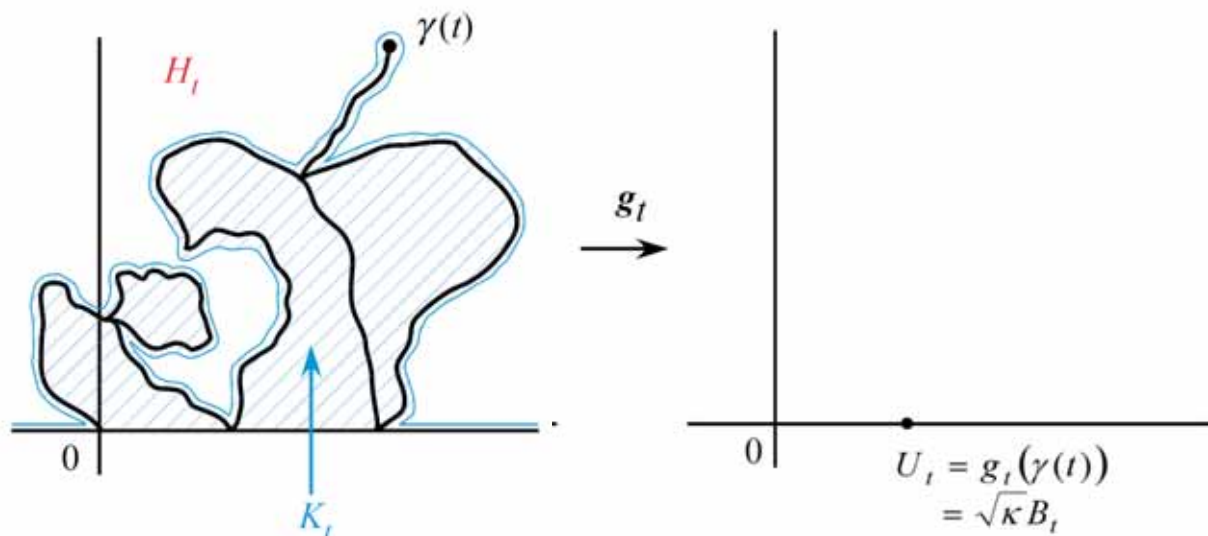
- SLE $_{\kappa}$  曲線  $\gamma$  は時間  $t$  とともに単調に伸びていくものとするとき、hull  $K_t$  も単調に増大していくことになる。よって  $g_t$  の定義域  $H_t$  は単調に減少していくことになる。
- 各  $z \in \mathbb{H}$  に対して

$$\begin{aligned} T_z &= \sup \left\{ t \geq 0 : \text{解 } g_t(z) \text{ が well-defined で } g_t(z) \in \mathbb{H} \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0 : z \in K_t \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

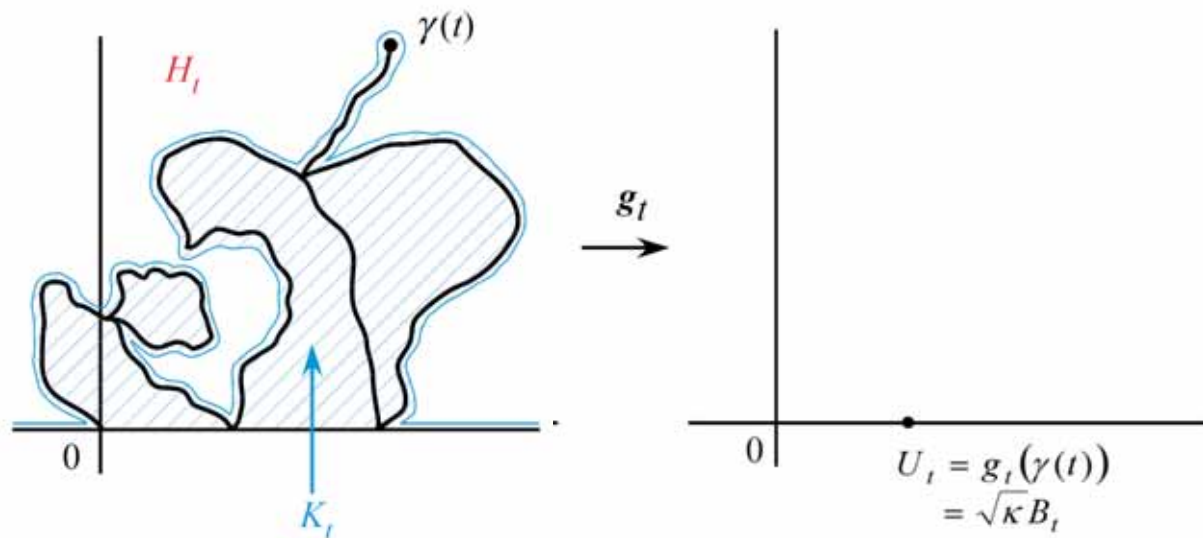
が定義される。これを用いると

$$\begin{aligned} H_t &= \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z > t \right\} \\ K_t &= \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z \leq t \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

と表せる。



- $g_t(z)$  の定義域  $H_t$  の境界を  $\partial H_t$  と書き, **pioneer point** を  $H_t^{\text{pion}} = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \partial H_s$  で定義する. SLE $_{\kappa}$  曲線  $\gamma$  は,  $\gamma(0) \in \mathbb{R}$  で  $H_t^{\text{pion}} = \mathbb{R} \cup \gamma(0, t]$  となるものである.



$SLE_\kappa$  曲線  $\gamma = \{\gamma(t) : 0 \leq t < \infty\}$  が与えられたとする. このとき, 各時刻  $s \geq 0$  に対して,  $\gamma^s$  を

$$\gamma^s(t) = g_s(\gamma(t+s)) - \sqrt{\kappa}B_s, \quad t \geq 0$$

で与えられる曲線であるとする. このとき,

$$\gamma^s \stackrel{d}{=} \gamma \quad \forall s \geq 0 \tag{3.42}$$

が成り立つことになる. この意味で  $SLE_\kappa$  はマルコフ性をもつことになる.

2.3 節で, BM のスケーリング性が  $BES_d$  に遺伝することを見たが, 同様にこれは  $SLE_\kappa$  にも遺伝する. 以下を  $SLE_\kappa$  のスケーリング性と呼ぶことにする.

**命題 3.3** 任意の  $r > 0$  に対して

$$\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) \stackrel{d}{=} g_t(z) \quad (3.43)$$

が成り立つ. すなわち,  $\tilde{\gamma}(t) \equiv \frac{1}{r} \gamma(r^2 t)$  とすると

$$\tilde{\gamma} \stackrel{d}{=} \gamma \quad (3.44)$$

である.

証明.  $\tilde{g}_t(z) = \frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz)$  とおく. まず初期値は  $\tilde{g}_0(z) = \frac{1}{r} g_0(rz) = \frac{1}{r} \times rz = z$  なので,  $\tilde{g}_0(z) = g_0(z) = z$  であり, 一致している.  $\tilde{B}_t = \frac{1}{r} B_{r^2 t}$  とすると,  $\tilde{g}_t(z)$  の従う方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{g}_t(z) &= \frac{1}{r} \times \frac{d}{dt} g_{r^2 t}(rz) \\ &= \frac{1}{r} \times \frac{2r^2}{g_{r^2 t}(rz) - \sqrt{\kappa} B_{r^2 t}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) - \sqrt{\kappa} \frac{1}{r} B_{r^2 t}} \\ &= \frac{2}{\tilde{g}_t(z) - \sqrt{\kappa} \tilde{B}_t} \end{aligned}$$

である. BM のスケーリング性より  $\tilde{B}_t \stackrel{d}{=} B_t$  なので,  $\tilde{g}_t(z)$  も  $g_t(z)$  と同じ  $SLE_\kappa$  であることになる. 従って, 分布は等しい. ■



$$\hat{g}_t(z) = \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}{\sqrt{\kappa}} \quad (3.45)$$

とすると,  $\hat{g}_t(z)$  は次の確率微分方程式を満たすことになる.

$$d\hat{g}_t(z) = \frac{2/\kappa}{\hat{g}_t(z)} dt + dW_t, \quad \hat{g}_0(z) = \frac{z}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t. \quad (3.46)$$

$T_z$  の定義 (3.40) より,  $\text{SLE}_\kappa$  曲線  $\gamma$  は時刻  $t = T_z$  で初めて  $z \in \mathbb{H}$  に到達する. つまり  $\lim_{t \nearrow T_z} \gamma(t) = z$  であり, この先端  $\gamma(t)$  の像は  $\sqrt{\kappa}B_{T_z}$  であるから, (3.45) より

$$\lim_{t \nearrow T_z} \hat{g}_t(z) = 0$$

となる.

つまり,  $T_z$  は  $z/\sqrt{\kappa}$  から出発して SDE (3.46) に従って動く  $\overline{\mathbb{H}}$  上の点が, 初めて原点 0 に到達する時刻ということになる.

特に SDE

$$d\hat{g}_t(z) = \frac{2/\kappa}{\hat{g}_t(z)} dt + dW_t, \quad \hat{g}_0(z) = \frac{z}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t.$$

式で  $z \rightarrow x \in \mathbb{R}$  としてみると, 注 3.1 で述べたように  $g_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$  なので  $\hat{g}_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$  である. したがって,  $\text{SLE}_\kappa$  を実軸上で考えたものは,  $\text{BES}_d$

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{1}{X_t^x} dt + dW_t, \quad X_0^x = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (3.47)$$

で

$$\kappa = \frac{4}{d-1} \iff d = \frac{4}{\kappa} + 1 \quad (3.48)$$

とおいたものに等しい.

このときには, 明らかに  $T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t^x = 0\}$  であり, 2.3 節では, この値の次元  $d$  依存性を詳しく議論したのであった.

各  $x$  に対して同じ BM,  $W_t$  をとることにする.  $x < y$  なら  $X_t^x < X_t^y, \forall t < T_x$  なので,  $T_x \leq T_y$  である. 2.3 節の定理 2.2 と 定理 2.3 では次を証明した.

- (1)  $d \geq 2$  のとき, 確率 1 で  $T_x = \infty, \forall x > 0$ .
- (2)  $1 \leq d < 2$  のとき, 確率 1 で  $T_x < \infty, \forall x > 0$ .
- (2a)  $\frac{3}{2} < d < 2$  のとき,  $0 < x < y$  に対して,  $\mathbb{P}\{T_x = T_y\} > 0$ .
- (2b)  $1 \leq d \leq \frac{3}{2}$  のとき,  $0 < x < y$  ならば確率 1 で  $T_x < T_y$ .

これに対応して,  $\text{SLE}_\kappa$  で生成される曲線  $\gamma$  には, 径数  $\kappa$  の値に応じて, 次のような 3 つの相があることが導かれる.

**定理 3.4** (i)  $0 < \kappa \leq 4$  のとき,  $\gamma$  は単純曲線であり,  $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$  である. また, このとき確率 1 で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = \infty. \quad (3.49)$$

(ii)  $4 < \kappa < 8$  のとき,  $\gamma$  は自分自身や実軸と接することがあるが, 確率 1 で

$$\bigcup_{t>0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}} \quad (3.50)$$

である. よって,  $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$  である. しかし

$$\gamma[0, \infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H} \quad (3.51)$$

である. つまり,  $\mathbb{H}$  全体を埋めつくすことはない.

(iii)  $\kappa \geq 8$  のとき,  $\gamma$  は  $\overline{\mathbb{H}}$  のすべての点を埋めつくす:

$$\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}. \quad (3.52)$$

## SLE 曲線の3相(3態)

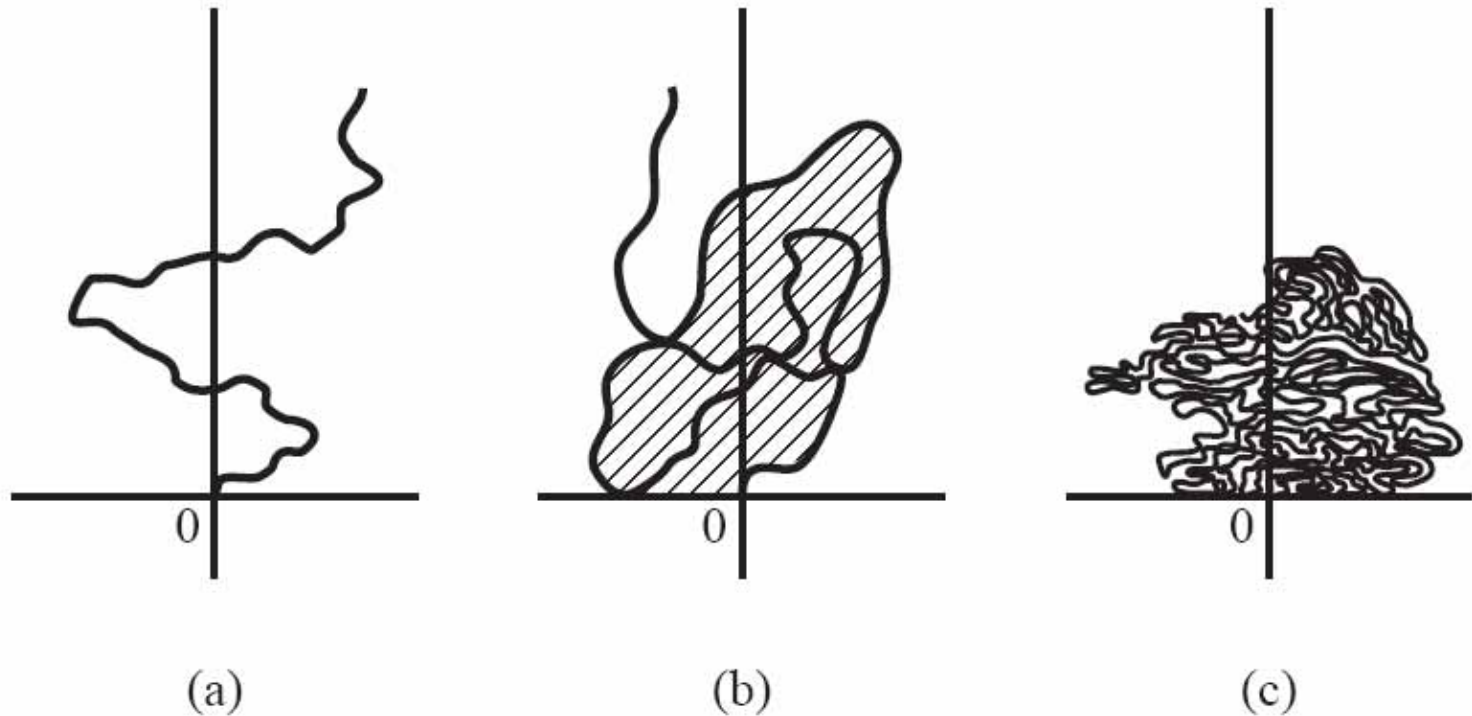
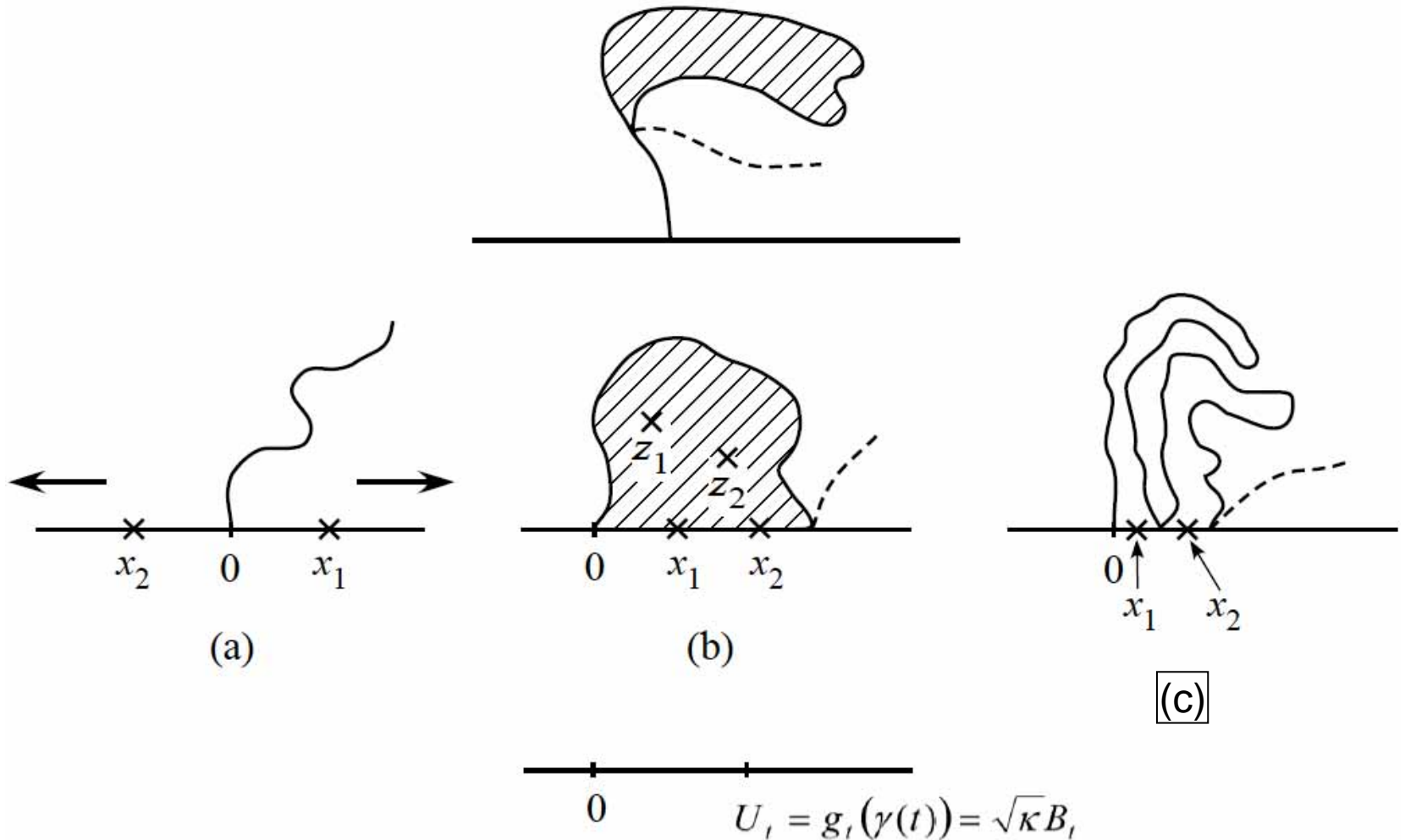
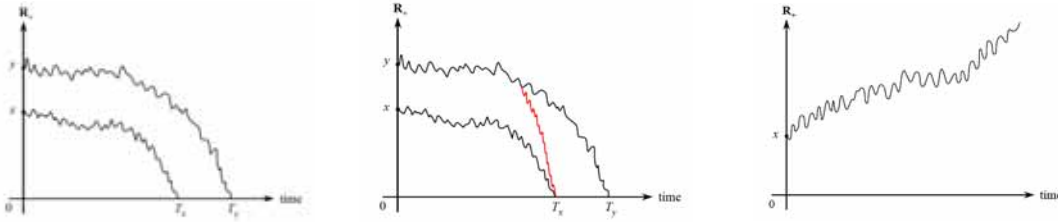


図 2: (a) 単純曲線.  $0 < \kappa \leq 4$  のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域 (斜線部分) は上半平面を覆いつくしていくが, 曲線自身で半平面が埋めつくされることはない.  $4 < \kappa < 8$  のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面を埋めつくしていく曲線.  $\kappa \geq 8$  のときの SLE 曲線の様子.



**(b) の場合:**  $(t)$  が実軸  $R$  と接した瞬間に, 斜線領域内の点はすべて同時に**呑み込まれて(swallowed)**,  $(t)$  とともに  $U_t$  に写されてしまう.

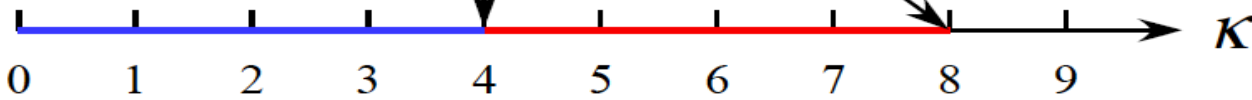
**(c) の場合:** には隙間はなく, 実軸上の点  $x_1, x_2, \dots$  は原点に近いものから順に  $U_t$  に写されていく.



$$d\hat{g}_t(x) = dB_t + \frac{2}{\kappa} \frac{dt}{\hat{g}_t(x)}$$



$$dX_t^x = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x}$$



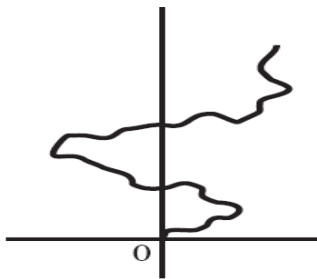
$$\frac{2}{\kappa} = \frac{d-1}{2}$$



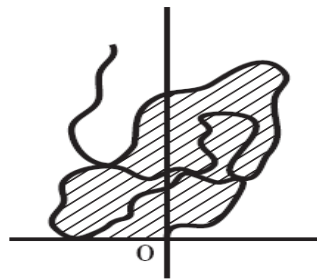
$$\kappa = \frac{4}{d-1}$$



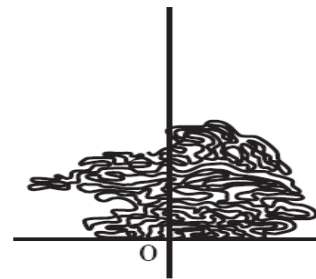
$$d = \frac{4}{\kappa} + 1$$



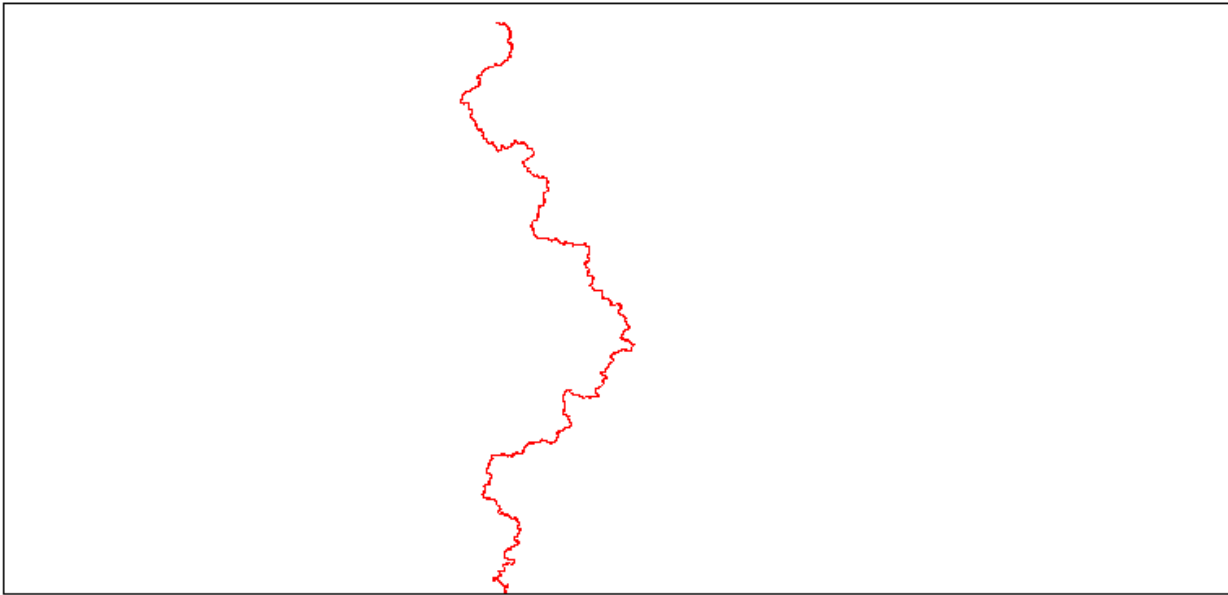
(a)



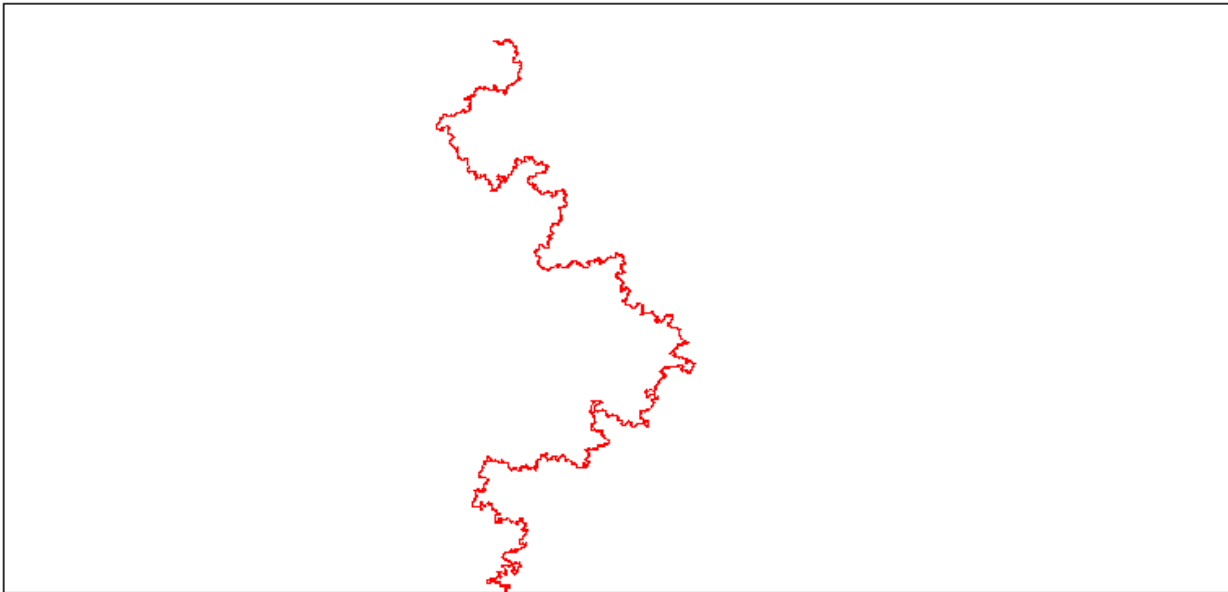
(b)



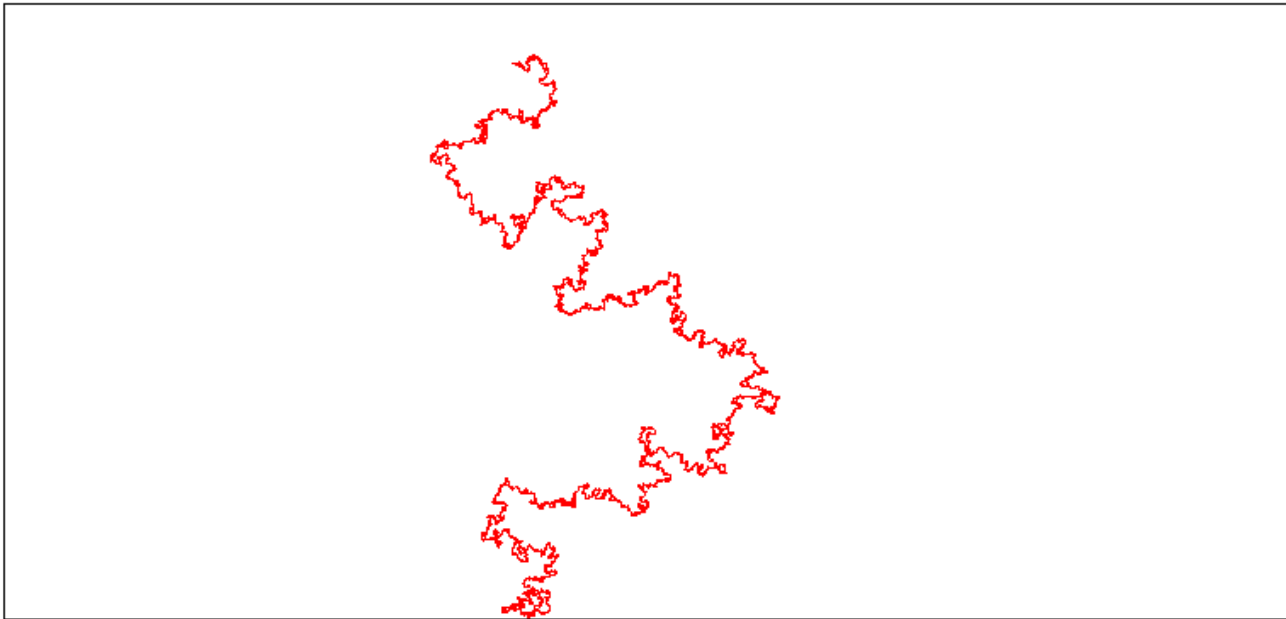
(c)



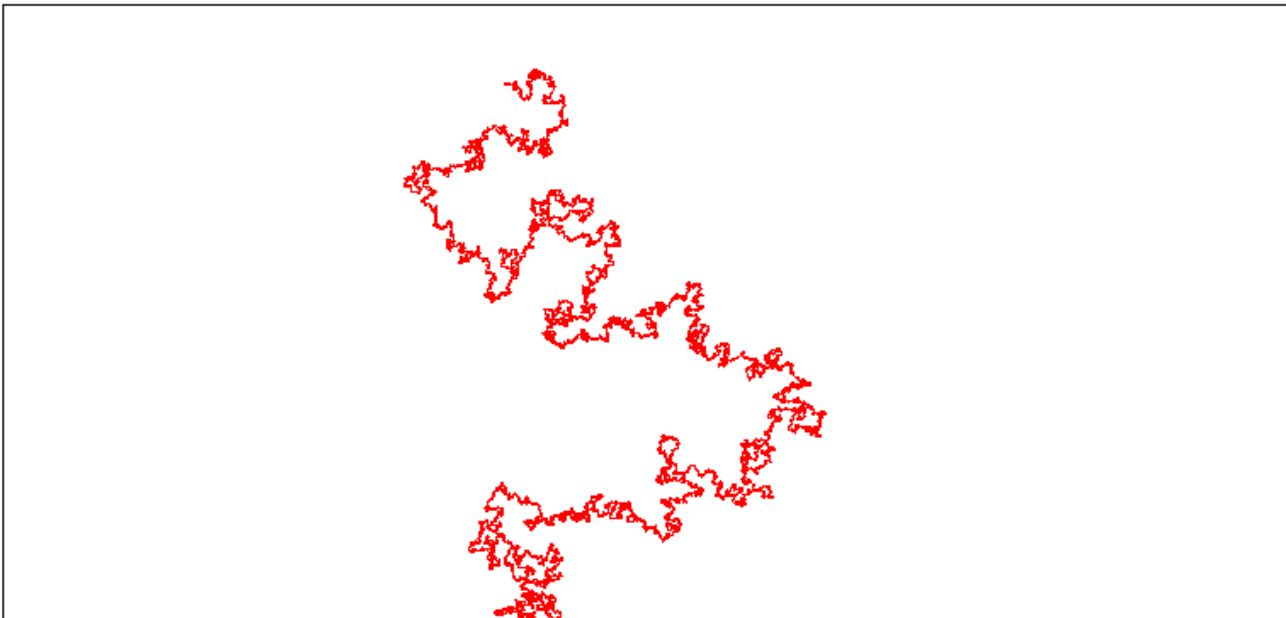
$$\kappa = 1.0$$



$$\kappa = 2.0$$

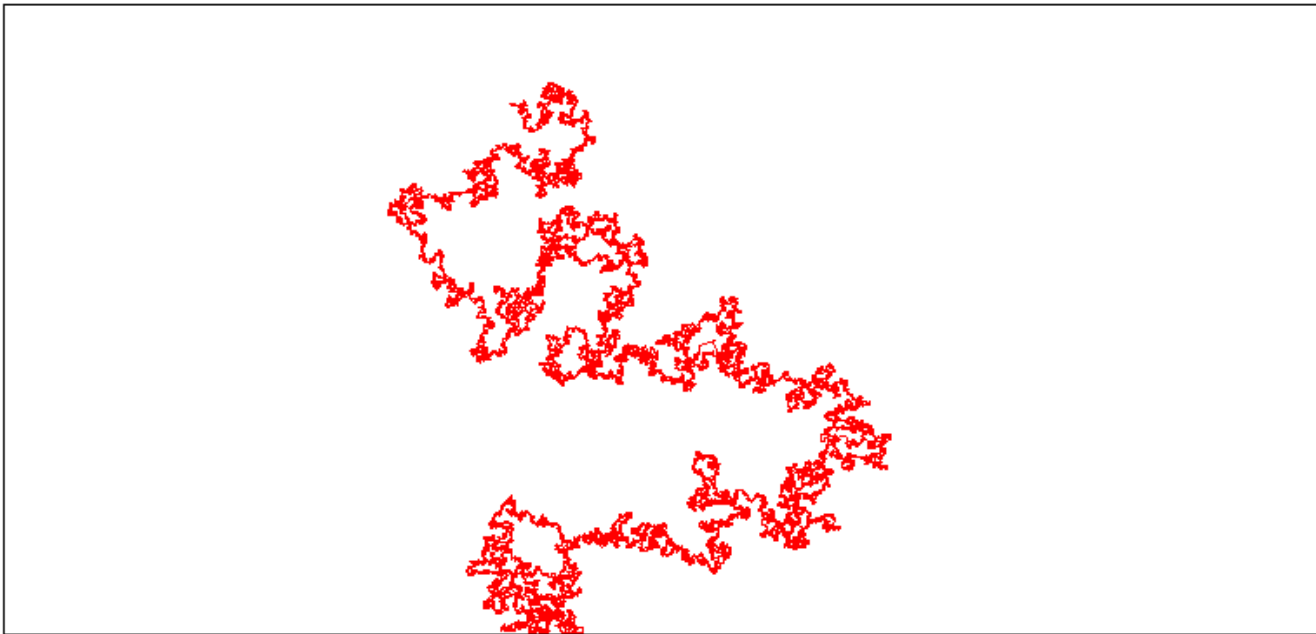


$$\kappa = 3.0$$

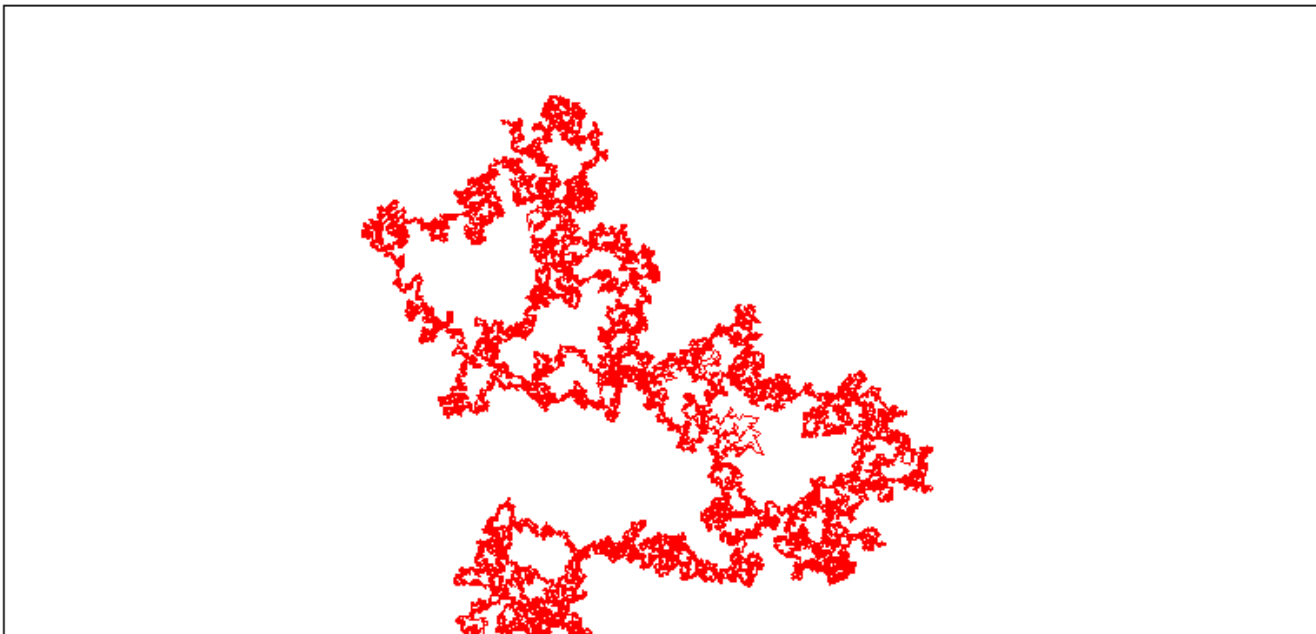


$$\kappa = 4.0$$

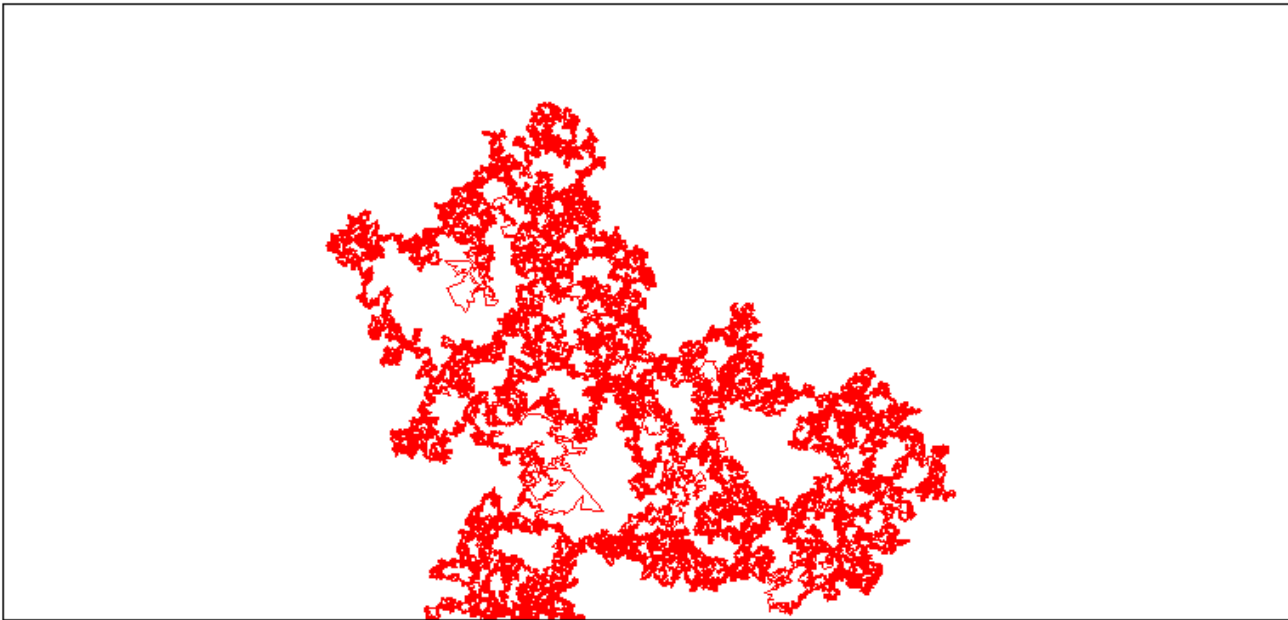




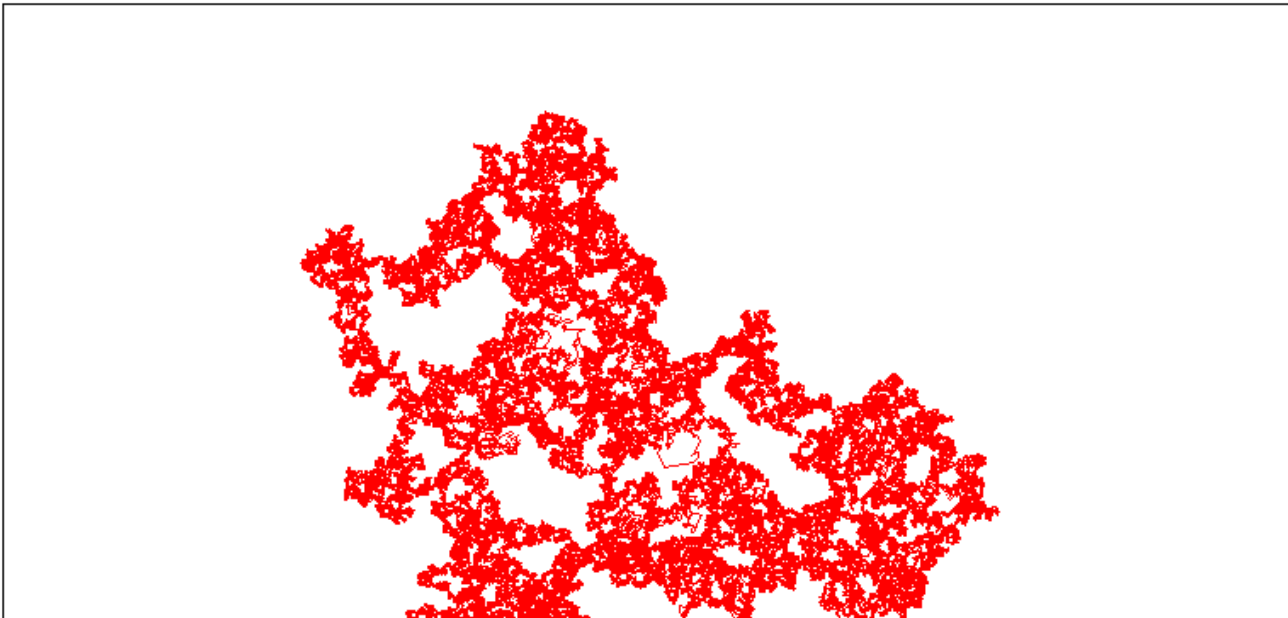
$$\kappa = 5.0$$



$$\kappa = 6.0$$



$$\kappa = 7.0$$



$$\kappa = 8.0$$

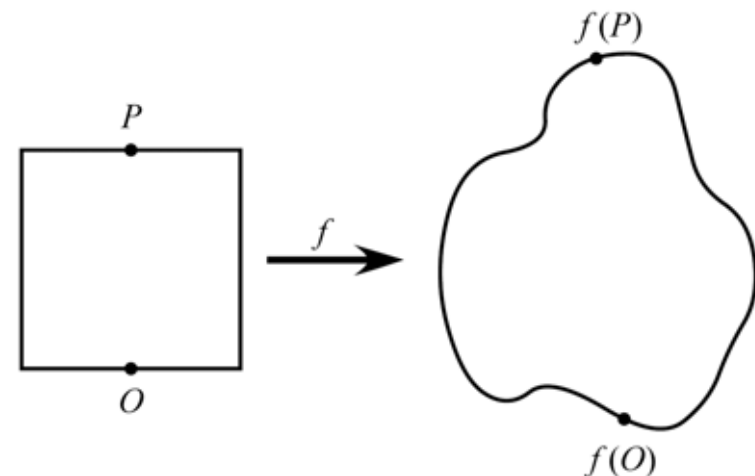
# 4 SLE と物理系との対応

## 4.1 Schramm のアイデア

$f: D_0 \subset \mathbb{C}$  上で正則,  $f'(z) \neq 0, \forall z \in D_0$  のとき

$f: D_0 \rightarrow f(D_0)$ : 共形変換 (等角写像)

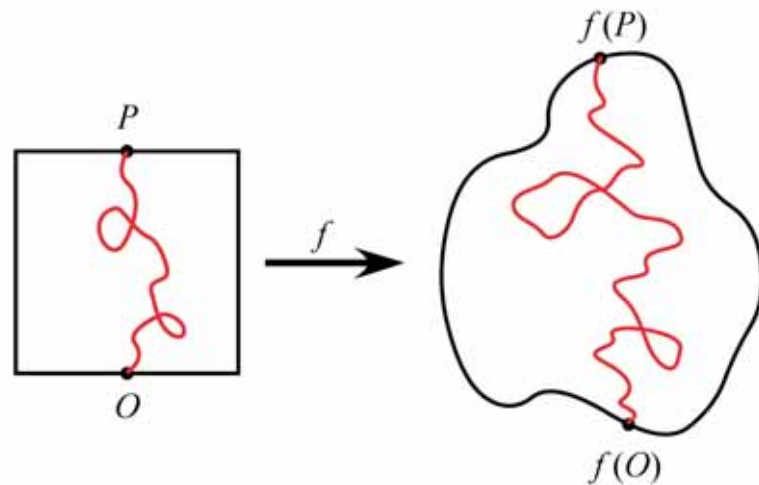
ただし,  $\partial D_0 \rightarrow f(\partial D_0), O \rightarrow f(O), P \rightarrow f(P)$  とする.



1.1 節で述べた平面格子上的統計力学模型の連続極限に伴って得られる連続関数  $\gamma$  に対する測度

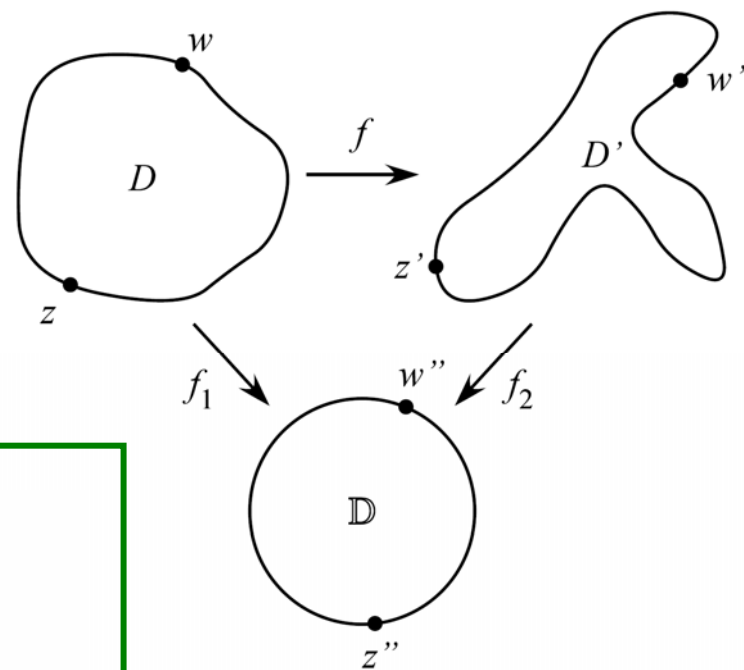
$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = C(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}(\cdot)$$

の共形変換  $f$  による変換性を考える.



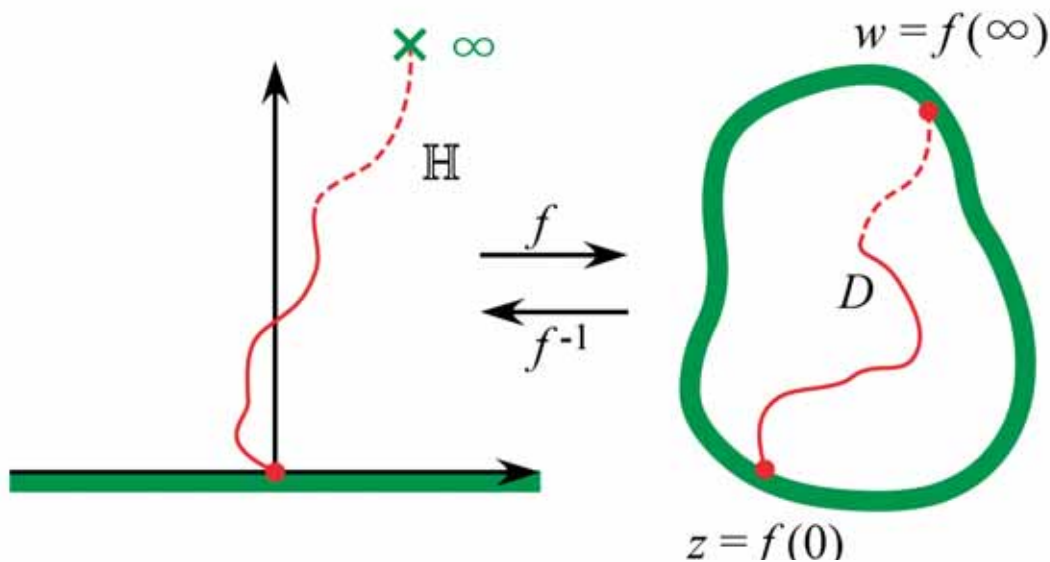
$D, D' : \mathbb{C}$  上の単連結領域 (ただし,  $D, D' \neq \mathbb{C}$ )

$$z, w \in \partial D, \quad z', w' \in \partial D'$$



### Riemann の写像定理

- $f : D \rightarrow D', f(z) = z', f(w) = w'$   
となる共形変換の1 径数族が存在する.
- さらに  $f'(w) = 1$  という条件を課すと, 共形変換は一意的に定まる.

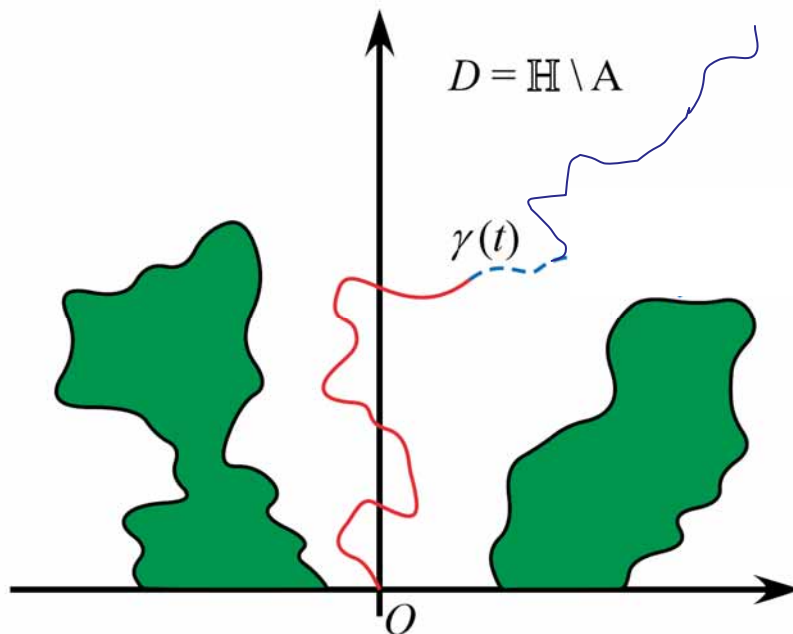


- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  : 上半平面
- 共形不変な確率測度  $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$   
 $\implies$  任意の単連結領域  $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$ ,  
 $z, w \in \partial D$  に対する  
 確率測度  $\mu_{(D;z,w)}$  が得られる

共形変換不変な測度の族  $\{\mu_{(D;z,w)}\}$  の代表元として  $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$  を考える.

- 共形不変な確率測度  $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$  が与えられれば, 任意の単連結領域  $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$ ,  $z, w \in \partial D$  に対する確率測度  $\mu_{(D;z,w)}$  が得られることになる.
- $\mathbb{H} \setminus D$  が有界である単連結領域  $D \subset \mathbb{H}$  に対して  $w = f(w) = \infty$  とすると, 条件  $|f'(w)| = 1$  より  $w' \rightarrow \infty$  で  $f(w') \sim w'$  となる. このような状況では, 共形共変性は次式で表される:

$$f \circ \bar{\mu}_{(D;z,\infty)}(\cdot) = |f'(z)|^b \bar{\mu}_{(f(D);f(z),\infty)}(\cdot), \quad z \in \partial D. \quad (4.1)$$



O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.

Schramm のアイデアは, ある確率過程  $U_t$  を駆動関数とするレヴナー方程式を考え, これに伴う曲線  $\gamma$  の分布関数として,  $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$  を定めるというものであった.

$\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$  が共形不変性と領域マルコフ性を持つということから,  $\gamma(0, t]$  は独立定常増分を持つことが結論される.

これに対応して, レヴナー方程式の駆動関数  $U_t$  も独立定常分布を持つことが要請される. すなわち

$$[\mathbf{A}] \quad U_t \perp (U_{t+s} - U_t), \quad \forall s, t > 0$$

$$[\mathbf{B}] \quad (U_{t+s} - U_t) \stackrel{d}{=} U_s, \quad \forall s, t > 0$$

とすべきであることになる.

Schramm はさらに

[C]  $U_t$  は連続な確率過程である

という要請を置いた. これから一般に,  $c_1, c_2$  を定数として

$$U_t = c_1 B_t + c_2 t$$

が結論される. その上で

[D] 虚軸に対する左右対称性  $\implies c_2 = 0$  (ドリフトなし)

とすると,

$$U_t = c_1 B_t$$

と定まる.

特に  $c_1 = \sqrt{\kappa}$  と径数付けした (また, 半平面 capacity を  $a_2(t) = 2t$  と径数付けした) のが  $\text{SLE}_\kappa$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z$$

である.



以上の Schramm のアイデアは，次の定理として証明されている．

**定理 4.1 (Lawler-Schramm-Werner)** 連続関数空間上の測度で共形共変性と領域 Markov 性を持つものはすべて，1 径数族である  $SLE_\kappa$  測度， $\kappa \in (0, \infty)$  で与えられる．

さらに次が証明されている．

**定理 4.2 (Beffara)**  $\kappa \leq 8$  のとき  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma(0, \infty)$  のフラクタル次元 (Hausdorff 次元) は次式で与えられる：

$$d(\kappa) = 1 + \frac{\kappa}{8}.$$

## 4.2 局所性と制限性

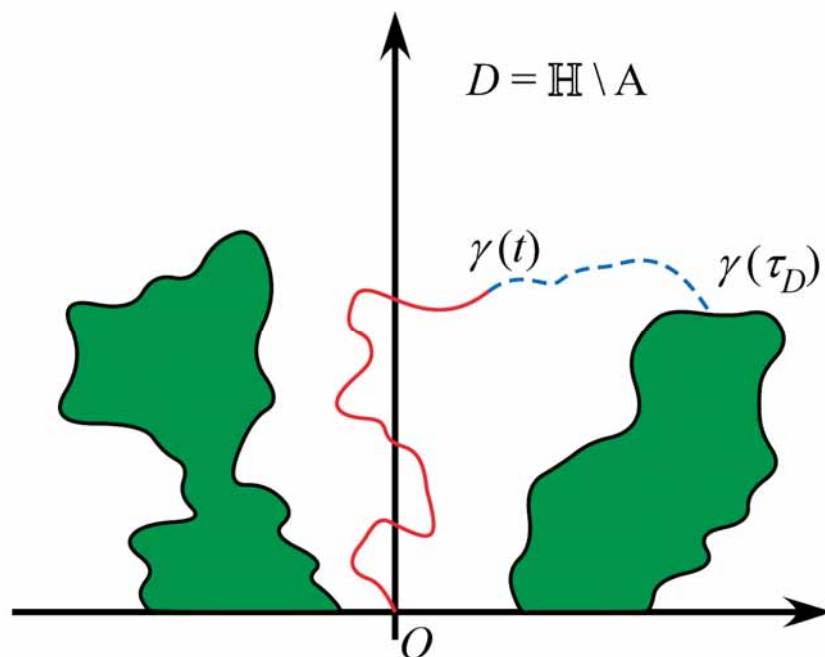
$$\mathcal{D} = \left\{ D \subset \mathbb{H} : \text{単連結}, \mathbb{H} \setminus D \text{ 有界}, \text{dist}(0, \mathbb{H} \setminus D) > 0 \right\}.$$

$D \in \mathcal{D}$  に対して

$$\exists! \Phi_D : \text{共形変換 s.t. } D \rightarrow \mathbb{H}, \quad \Phi_D(z) = z + o(1), z \rightarrow \infty.$$

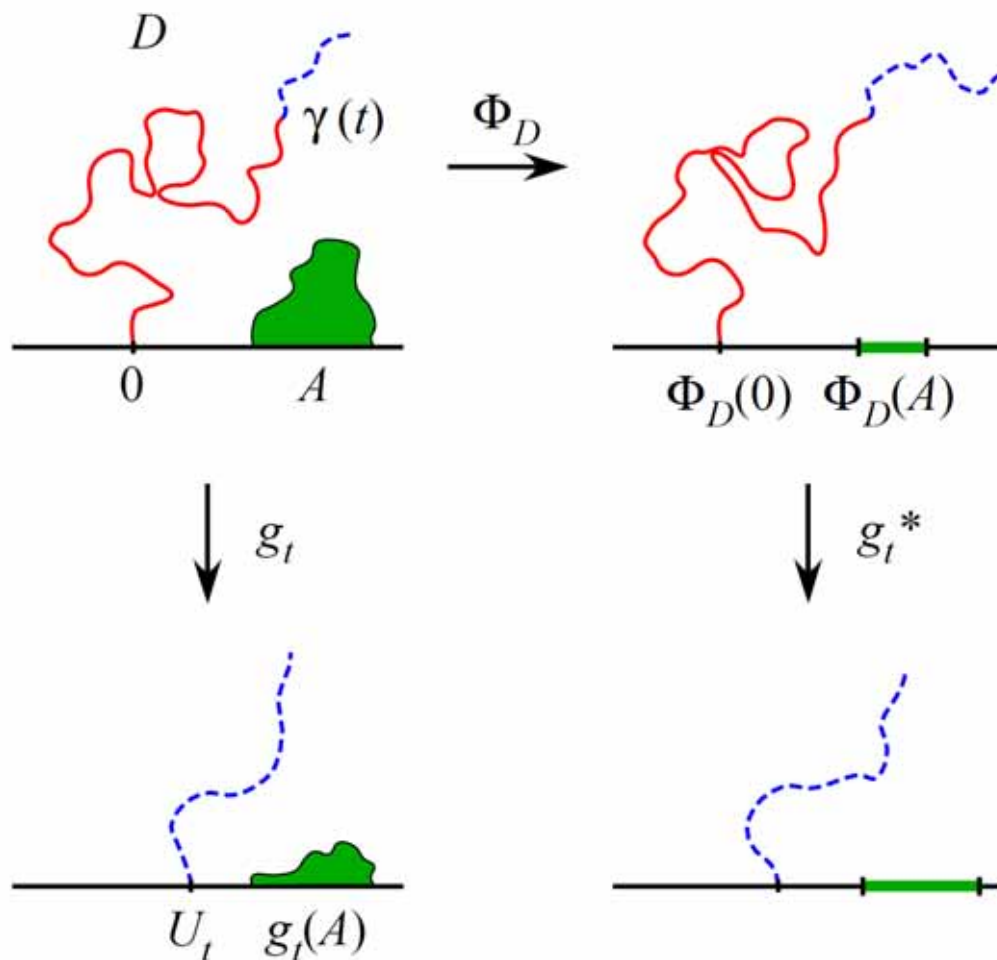
SLE $_{\kappa}$  曲線  $\gamma$  に対して

$$\tau_D = \inf \left\{ t : \text{dist}(\gamma(t), \mathbb{H} \setminus D) = 0 \right\}.$$



緑の領域が  $A$

$t < \tau_D$  の間は  $\gamma$  は部分領域  $D$  内に制限されている。



- $\gamma(0, \tau_D) \rightarrow \Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$  は  $\bar{\mathbb{H}}$  内の曲線.
- $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$  の共形不変性  $\implies$  曲線  $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$  で生成される  $g_t^*(z)$  も Loewner 方程式に従うはず.

しかし、変換  $\Phi_D$  により曲線の径数付けに変更（時間変更）が生じる.

$\gamma$  の確率測度の共形不変性より，曲線

$$\gamma^*(0, t] = \Phi_D(\gamma(0, t]), \quad t < \tau_D$$

で生成される  $g_t^*(z)$  も Loewner 方程式に従うはずである). ただし, 変換  $\Phi_D$  により曲線の径数付けに変更が生じる.

$\gamma^*(0, t]$  の半平面 capacity は

$$a_2^*(t) = \text{hcap}(\gamma^*(0, t]) = \text{hcap}(\Phi_D(\gamma(0, t]))$$

なので, 元の  $\text{SLE}_\kappa$  の右辺の分子で  $2 \rightarrow 2(\Phi_t'(U_t))^2$  として

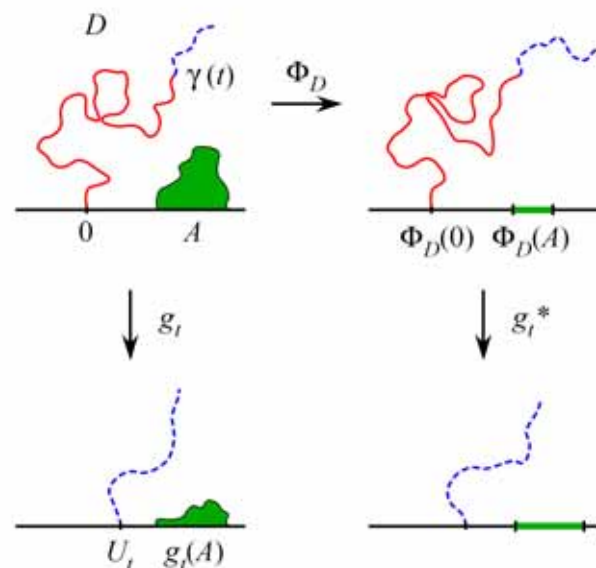
$$\frac{d}{dt} g_t^*(z) = \frac{2(\Phi_t'(U_t))^2}{g_t^*(z) - U_t^*} \quad (4.2)$$

とすればよいことが分かる. ただしここで,  $U_t = \sqrt{\kappa} B_t$  に対して,

$$\Phi_t \equiv \Phi_{g_t(D)} = g_t^* \circ \Phi_D \circ g_t^{-1}$$

$$U_t^* \equiv g_t^*(\gamma^*(t)) = \Phi_t(U_t)$$

である.



$U_t^*$  に対して伊藤の公式を用いると,  $U_t = \sqrt{\kappa}B_t$  なので

$$dU_t^* = \left[ \dot{\Phi}_t(U_t) + \frac{\kappa}{2}\Phi_t''(U_t) \right] dt + \sqrt{\kappa}\Phi_t'(U_t)dB_t$$

を得る. テキスト付録 A.4 の (A.50) より

$$\dot{\Phi}_t(U_t) \equiv \frac{d}{dt}\Phi_t(U_t) = -3\Phi_t''(U_t)$$

なので, この式は

$$dU_t^* = \left[ \frac{\kappa}{2} - 3 \right] \Phi_t''(U_t)dt + \sqrt{\kappa}\Phi_t'(U_t)dB_t \quad (4.3)$$

と書き直せる.

ランダムな時間変更  $t \mapsto r(t)$  を

$$t = \int_0^{r(t)} \Phi'_s(U_s)^2 ds$$

に従って行い,  $\tilde{U}_t^* \equiv U_{r(t)}^*$  とおくと, (4.3) は

$$d\tilde{U}_t^* = -b(\kappa) \frac{\Phi''_{r(t)}(U_{r(t)})}{\Phi'_{r(t)}(U_{r(t)})^2} \kappa dt + \sqrt{\kappa} d\tilde{B}_t \quad (4.4)$$

と変換される. ただし,

$$b = b(\kappa) = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}. \quad (4.5)$$

であり,

$$\tilde{B}_t \equiv \int_0^{r(t)} \Phi'_s(U_s) dB_s$$

は 1 次元標準ブラウン運動である.  $\tilde{g}_t^*(z) = g_{r(t)}^*(z)$  とすると, (4.2) は

$$\frac{d}{dt} \tilde{g}_t^*(z) = \frac{2}{\tilde{g}_t^*(z) - \tilde{U}_t^*}$$

と変換される.

- $\kappa = 6$  のときに限り  $b(\kappa) = 0$  となり,

$$d\tilde{U}_t^* = -b(\kappa) \frac{\Phi''_{r(t)}(U_{r(t)})}{\Phi'_{r(t)}(U_{r(t)})^2} \kappa dt + \sqrt{\kappa} d\tilde{B}_t$$

は

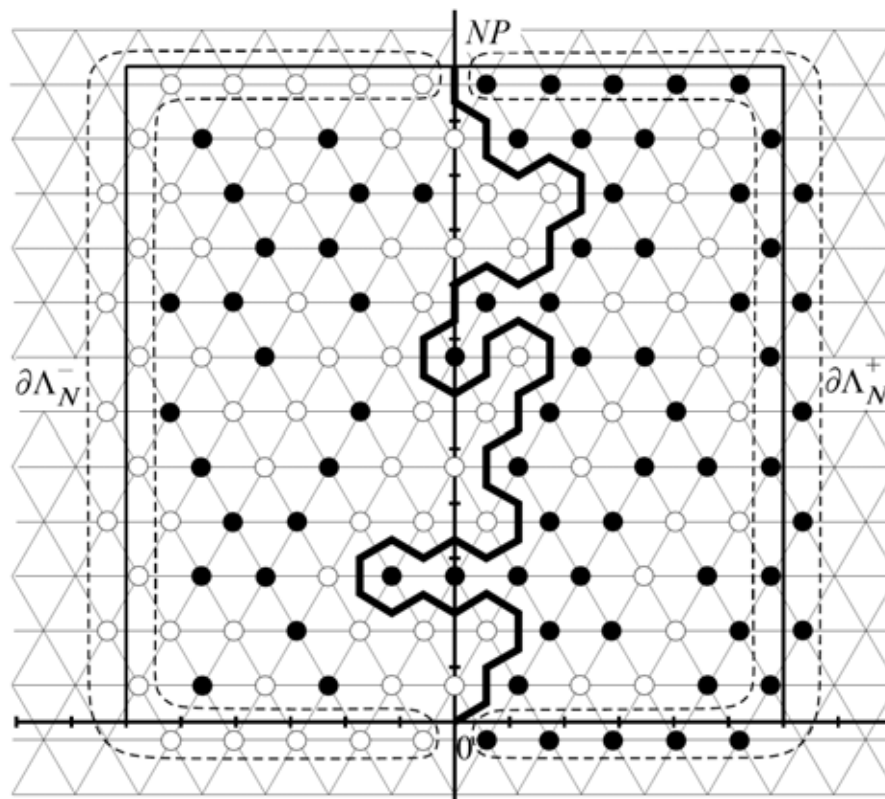
$$d\tilde{U}_t^* = \sqrt{6} d\tilde{B}_t$$

となる.

- このときは, 任意の  $D \in \mathcal{D}$  に対して  $g_t(z)$  も  $\tilde{g}_t^*(z)$  もともに,  $U_t \stackrel{d}{=} \sqrt{6} B_t$  で駆動される  $\text{SLE}_6$  を満たす.
- 言い換えると, 部分領域  $D$  に制限された  $\gamma$  の共形変換である  $\gamma^*(0, t] = \Phi_D(\gamma(0, t])$ ,  $t < \tau_D$  は, 制限のない  $\text{SLE}_6$  の時間変更ということである. つまり, 局所性が成り立つことになる.

**定理 4.3**  $\text{SLE}_\kappa$  測度  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$  は  $\kappa = 6$  のときに限り局所性を持つ.

# 局所性(locality property)



浸透探索過程  $\omega$

Bernoulli 測度  $\nu_p \implies$  局所性



$\kappa \neq 6$  のときは (4.4) にはドリフト項があるので,  $U_t$  はマルチンゲールではない. しかし, 次のようにして別の局所マルチンゲール  $M_t$  を得ることが出来る.

- $b$  を未定定数として  $(\Phi'_t(U_t))^b$  という量を考える. 伊藤の公式を用いると, テキスト付録 A.4 に示した計算の結果, 次の SDE を導くことができる:

$$d(\Phi'_t(U_t))^b = b(\Phi'_t(U_t))^b \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} dB_t + \left\{ \frac{(b-1)\kappa + 1}{2} \frac{(\Phi''_t(U_t))^2}{(\Phi'_t(U_t))^2} - \frac{8-3\kappa}{6} \frac{\Phi'''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} \right\} dt \right]. \quad (4.6)$$

- ここで  $b$  を

$$b = b(\kappa) = \frac{6-\kappa}{2\kappa}.$$

とする. すると (4.6) は

$$d(\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} = b(\kappa)(\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} dB_t - \frac{8-3\kappa}{6} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) dt \right] \quad (4.7)$$

となる. ただしここで,  $\mathcal{S}f$  は関数  $f$  のシュバルツ微分

$$\mathcal{S}f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \frac{(f'')^2}{(f')^2} \quad (4.8)$$

を表す.

- 新たにパラメータ  $c$  を導入して

$$M_t = (\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} dM_t &= d(\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \\ &\quad - (\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \frac{c}{6} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) dt \end{aligned}$$

なので, (4.7) を代入すると

$$dM_t = b(\kappa) \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} M_t \sqrt{\kappa} dB_t - \frac{1}{6} \left\{ c + (8 - 3\kappa)b(\kappa) \right\} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) M_t dt$$

となる.

- そこで

$$\begin{aligned}
 c = c(\kappa) &= (3\kappa - 8)b(\kappa) \\
 &= \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

と置くと,

$$dM_t = b(\kappa) \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} M_t \sqrt{\kappa} dB_t$$

となるので,

$$M_t = (\Phi_t'(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \tag{4.10}$$

は局所マルチンゲールであることになる.

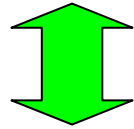
- ここでは説明を略すが, 一般に

$$\mathcal{S}\Phi_t(U_t) \leq 0.$$

$\kappa \leq 8/3$  のときは  $c(\kappa) \leq 0$  なので, このときは  $M_t \leq 1$ . したがって  $M_t$  はマルチンゲールである.

## Girsanov 変換

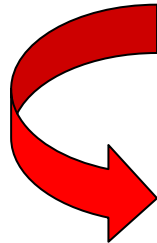
$$\bar{\mu}_{(D;U_t,\infty)} \Big| \mathcal{F}_t \implies (\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \bar{\mu}_{(\Phi_t(D);\Phi_t(U_t),\infty)} \Big| \mathcal{F}_t$$



## 共形共変性

$$f \circ \bar{\mu}_{(D;z,\infty)} = |f'(z)|^b \bar{\mu}_{(f(D);f(z),\infty)}$$

ただしここでは,  $f = \Phi_t, z = U_t$  である.



$$b = b(\kappa) = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$t \rightarrow \infty$  で  $\gamma(t) \rightarrow \infty$ , かつ  $\gamma(0, \infty) \subset D$  であるような  $\text{SLE}_\kappa$  曲線  $\gamma$  に対しては,  $t \rightarrow \infty$  で  $\Phi'_t(U_t) \rightarrow 1$  であることが示せる.  $\kappa \leq 4$  では  $\text{SLE}_\kappa$  曲線は単純曲線であり  $\mathbb{H}$  内から外にでないことを用いると, 次の表式を導くことができる:  $\kappa \leq 4, D \in \mathcal{D}$  に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}}(\gamma) = M_\infty = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset D\} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^\infty \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\}. \quad (4.11)$$

(4.9) から分かるように,  $\kappa \leq 4$  では  $\kappa = 8/3$  のときに限り  $c(\kappa) = 0$  となる. このとき (4.11) は

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}}(\gamma) = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset D\}$$

となる. 次が結論される.

**定理 4.4**  $\text{SLE}_\kappa$  測度  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^\kappa$  は  $\kappa = \frac{8}{3}$  のときに限り制限性を持つ.

## 4.3 対応関係

- $\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$  の共形不変性が証明されれば ( $\mu^{\text{per}}$  は局所性を併せ持つので)  
 $\implies \mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}} \stackrel{c}{=} \mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$
- $\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}$  の共形共変性が証明されれば ( $\bar{\mu}^{\text{SAW}}$  は制限性を併せ持つので)  
 $\implies \bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$

ただし、ここでの  $\stackrel{c}{=}$  は共形変換によって変換できるという意味。

- 臨界浸透模型の連続極限の共形不変性  $\iff$  (三角格子上のみ) Smirnov (2001)
- SAW の連続極限の共形共変性  $\iff$  未証明
- 次は証明されている :

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2 \quad (\text{Schramm (2000), Lawler-Schramm-Werner (2001)})$$

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3 \quad (\text{Smirnov(2007)})$$

$$d = 1 + \frac{\kappa}{8}$$
$$b = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$d_{\text{LERW}} = d(2) = \frac{5}{4}, \quad d_{\text{SAW}} = d(8/3) = \frac{4}{3}, \quad d_{\text{Ising}} = d(3) = \frac{11}{8}, \quad d_{\text{per}} = d(6) = \frac{7}{4},$$
$$b_{\text{LERW}} = b(2) = 1, \quad b_{\text{SAW}} = b(8/3) = \frac{5}{8}, \quad b_{\text{Ising}} = b(3) = \frac{1}{2}, \quad b_{\text{per}} = b(6) = 0.$$

**注 4.1.** 2次元格子上的の統計物理模型の連続(スケーリング)極限と  $SLE_\kappa$  測度は次のように対応していることが“知られている”.

$$\begin{array}{ll}
 \kappa = 2 & \iff \text{ループ除去ランダムウォーク (LERW)} \\
 \kappa = \frac{8}{3} = 2.\dot{6} & \iff \text{自己回避ウォーク (SAW)} \\
 \kappa = 3 & \iff \text{臨界イジング界面曲線} \\
 \kappa = 4 & \iff \text{臨界 4 状態ポッツ模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = \frac{24}{5} = 4.8 & \iff \text{臨界 3 状態ポッツ模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = \frac{16}{3} = 5.\dot{3} & \iff \text{臨界イジング模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = 6 & \iff \text{臨界浸透探索過程} \\
 \kappa = 8 & \iff \text{uniform spanning tree (UST)} \tag{4.12}
 \end{array}$$

( $q$  状態ポッツ模型の  $q = 2$  がイジング模型,  $q = 1$  がパーコレーション模型,  $q = 0$  が UST にそれぞれ対応する.  $\kappa$  との対応は  $q = 2 + 2 \cos(8\pi/\kappa)$ ,  $4 \leq \kappa \leq 8$  とされている.)

W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its application, *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 1149-1229.



$$b = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$



$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

Virasoro 代数

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$L_n|b\rangle = 0, n \geq 1, L_0|b\rangle = b|b\rangle$  となる固有値と固有ベクトルの対  $(b, |b\rangle)$  を導入.  
最高ウェイト表現  $\mathcal{H}_b = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|b\rangle$  を考える.

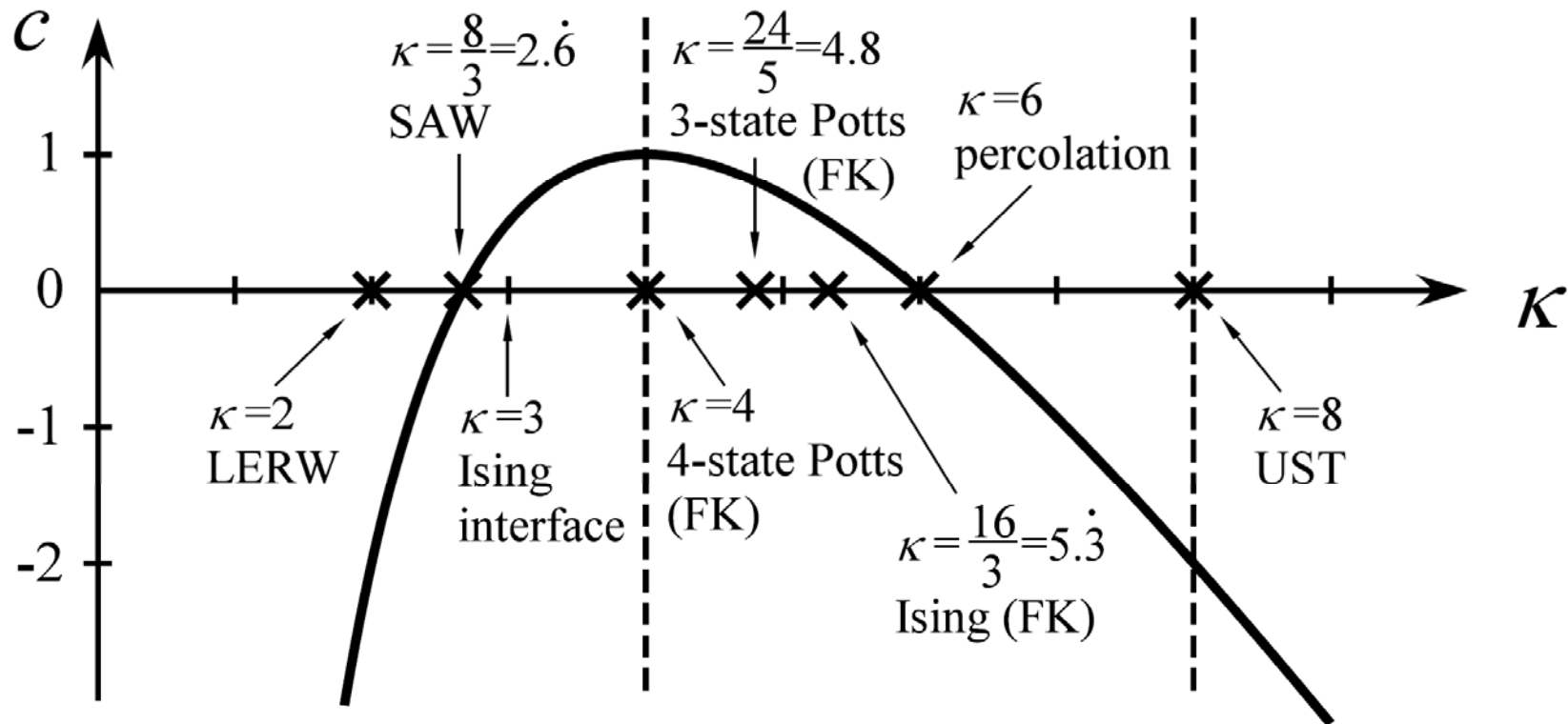
$$\det \begin{pmatrix} \langle b|L_2L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_2L_{-1}L_{-1}|b\rangle \\ \langle b|L_1L_1L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_1L_1L_{-1}L_{-1}|b\rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4b + c/2 & 6b \\ 6b & 4b(1 + 2b) \end{pmatrix} = 0$$

となるとき、**レベル 2 の退化表現**が得られる (Kac 公式).

$b \neq 0$  とすると、この条件式は

$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

に等しい



- SLE 曲線の径数  $\kappa$  と中心電荷  $c$  との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の  $\kappa$  の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.

# 今後の課題

## [1] SLE の基礎理論の整備

$U_t=Bt$  filtration, Bessel flow SLE

可逆性, 双対性, 径数付けについて

## [2] SLE 曲線の研究とSLE の拡張

SLE( , ), multiple SLE, ...

## [3] 統計力学模型の連続極限(フラクタル曲線)の同定

SAW, Ising 模型, Potts 模型,  $O(N)$  模型, ...

DLA, height models, Coulomb gas, ...

(なぜ, 特定の の値が物理のモデルを実現するのか?)

universality class の確率論的な意味づけ.)

## [4] 共形場理論との対応

共形場(多点)相関関数 (多点)マルチンゲール

(Cardy's formula, Schramm-Zhou's 2pt martingale)

ストレス・テンソルと **CLE (conformal loop ensemble)**