Dirichlet Solutions on Bordered Riemann Surfaces and Quasiconformal Mappings

東工大大学院・理工学研究科　志賀　啓成

1　問題設定

open Riemann 面 S_0, S_n $(n = 1, 2, \dots)$ および擬等角写像 $\varphi_n : S_0 \to S_n$ が与えられ，さらに φ_n の maximal dilatation $K_n = K(\varphi_n)(\geq 1)$ が $\lim_{n\to\infty} K_n = 1$ を満たしているとする．このとき次のような問題を考える．

Question： S_n 上の等角不変量はどのような挙動をするか？

本講演では調和函数，とくに Dirichlet 問題の解の動きについて考える．

一般に擬等角写像 $\varphi : S \to S'$ は S, S' 上の Dirichlet 函数の空間（あるいは Sobolev 空間）$D(S), D(S')$ の間のノルムが $K(\varphi)$ 以下の同型写像 $\varphi_\#$ を導く．ただし，$v \in D(S)$ に対して

$$\varphi_\#(v) = v \circ \varphi^{-1} \in D(S')$$

と定める．S 上の Dirichlet 積分有限な調和函数の空間 $HD(S) \subset D(S)$ に属する函数 u を考え，$\varphi_\#(u)$ に対して Royden 分解

$$\varphi_\#(u) = u_\varphi + v_{0,\varphi}$$

を行う．ここに $u_\varphi \in HD(S')$ で $v_{0,\varphi}$ は S' の Dirichlet potential である．このように $u \in HD(S)$ に $u_\varphi \in HD(S')$ を対応させる写像を P_φ と書くことにする．$P_\varphi : HD(S) \to HD(S')$ は連続線型同型である．$P_\varphi(u)$ は S' の Royden コンパクト化において φ より induce された境界値写像による Dirichlet 問題の解の変形と見なせる．我々は最初に挙げた状況において $P_n(u) := P_{\varphi_n}(u)$ の挙動を問題にする．また同様の観点から，S_0, S_n が境界付き Riemann 面であるとき，∂S_0 上の連続函数 f に対して，f を境界値にもつ S_0 上の Dirichlet 問題の解 $H_f^{S_0}$ と $f \circ \varphi_n^{-1}$ を境界値にもつ S_n 上の Dirichlet 問題の解 $H_{f\circ\varphi_n^{-1}}^{S_n}$ の比較を問題にする．

2　一様収束性

定理 2.1 *§1* の仮定のもとで，任意の $u \in HD(S_0)$ に対して $\{P_n(u) \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は u に S_0 上広義一様収束する．

定理 2.2 S_0, S_n を *compact bordered Riemann* 面とする．このとき，*§1* の仮定のもとで ∂S_0 上の任意の連続函数 f に対して，$\{H^{S_n}_{f\circ\varphi_n^{-1}} \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $H^{S_0}_f$ に S_0 上一様収束する．

S_0 が（したがって S_n も）parabolic end(s) であるとき，双対境界 ∂S_0 上の任意の連続函数 f に対して，一般化された Dirichlet 問題の解 $H^{S_0}_f$ が f により一意的に定義される．擬等角写像 $\varphi_n : S_0 \to S_n$ は ∂S_0 から ∂S_n の上への同相写像を与えるとみなせるから，$H^{S_n}_{f\circ\varphi_n^{-1}}$ も同様に定義される．このとき次のことが成り立つ．

定理 2.3 上の仮定のもとで ∂S_0 上の任意の連続函数 f に対して，$\{H^{S_n}_{f\circ\varphi_n^{-1}} \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $H^{S_0}_f$ に S_0 上理想境界の任意の近傍を除き一様収束する．また，S_0 が *Heins end* でその調和次元が 1 であるとき，この収束は S_0 全体で一様である．

また，S_0 が nodes をもった境界付き有限型 Riemann 面で，$\{S_n\}$ が S_0 への「退化族」である場合も同様の問題を考える．S_0 を（有限個の）nodes を持った有限型 Riemann 面とする．S_0 の nodes 全体の集合を $N(S_0)$ と書く．Triple $\{S_n, \varphi_n, S_0\}$ が以下の条件を満たすとき，これを退化族という．

1. S_n は通常の compact bordered Riemann 面で，φ_n は S_n から S_0 への全射連続写像である．

2. $N(S_0)$ の任意の点 p に対して $\varphi_n^{-1}(p)$ は S_n 上の非自明な単純閉曲線 $\alpha_n(p)$ である．

3. 任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(S_0)$ の近傍 U_ϵ と自然数 n_0 が存在して，$n \geq n_0$ ならば，$\varphi_n^{-1}|_{S_0 \setminus U_\epsilon}$ は $(1+\epsilon)$-qc になる．

$S_0 \setminus N(S_0)$ の連結成分を S_0 の part という．S_0 の part でその境界に S_0 の境界成分曲線を含むものを bordered part といい，そうでないものを non-bordered part という．S_0^b を S_0 の bordered part としたとき，∂S_0 上の任意の連続函数 f を ∂S_0^b に制限することによって S_0^b 上境界値 f を持つ Dirichlet 問題の解 $u_{S_0^b}$ を得る．ただし，$u_{S_0^b}$ は nodes の近傍では有界になるようにとっておく．S_0

の各 bordered part でこのような函数を作り，non-bordered part では 0 と定義した S_0 上の調和函数を $H_f^{S_0}$ とする．

さて，退化族 $\{S_n, \varphi_n, S_0\}$ が与えられているとき，$\varphi_n : S_n \to S_0$ は ∂S_n から ∂S_0 への同相写像を与える．したがって，∂S_0 上の連続函数 f に対して $f \circ \varphi$ は ∂S_n 上の連続函数になり，その Dirichlet 解 $H_{f\circ\varphi_n}^{S_n}$ を考えることが出来る．このとき，以下のことが成り立つ．

定理 2.4 *U を S_0 における $N(S_0)$ の近傍としたとき，各 bordered part S_0^b に対して $\{H_{f\circ\varphi_n}^{S_n} \circ \varphi_n^{-1}\}$ は $S_0^b \setminus U$ 上 $H_f^{S_0}$ に一様収束する．*

注意 2.1 *non-bordered part* では（収束も含め）一般に何も結論できない．また，上の主張で S_0^b 上一様収束させることは，一般に出来ない

3 可微分性

S_0 を compact bordered Riemann 面または parabolic end とし，μ を S_0 上の Beltrami 微分とする．$t \in [-1, 1]$ に対して $t\mu$ が定める擬等角写像を $\varphi_t : S_0 \to S_t$ とする．このとき次のことが成立する．

定理 3.1 *μ の台が ∂S_0 の点を含まないとき，任意の $p \in S_0$ および ∂S_0 上の任意の連続函数 f に対して，t の函数と見て，$H_{f\circ\varphi_t^{-1}}^{S_t} \circ \varphi_t(p)$ は t の関数として C^1 級である．*

References

[1] H. Shiga, On the quasiconformal deformation of open Riemann surfaces and variations of some conformal invariants, J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982), 463–480.

[2] H. Shiga, preprint.